**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА

Кафедра информатики и систем управления

# ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Методические указания к практическим занятиям по курсам
«Теория графов и дискретная математика», «Дискретная математика»
для студентов специальностей 230100«Автоматизированные системы обработки информации и управления» и 230400«Информационные системы и технологии» дневной и очно-заочной форм обучения

Нижний Новгород
2015

Составители: М.А. Степаненко, Э.С. Соколова, Т.И. Балашова, О.Н. Корелин

621.37 (075.8)

Теория графов: Методические указания к практическим занятиям по курсам «Теория графов и дискретная математика», «Дискретная математика» для студентов специальностей 230100«Автоматизированные системы обработки информации и управления» и 230400«Информационные системы и технологии» дневной и очно-заочной форм обучения
/НГТУ; сост.: М.А. Степаненко, Э. С.Соколова,Т.И. Балашова, О.Н. Корелин.- Н.Новгород, 2015. – 16 с.

Приводятся краткие сведения основ теории графов. Подобраны задания для решения, которые могут использоваться при проведении практических занятий, а также для самостоятельного решения студентами специальностей 230100 и 230400. Решение приведенных задач позволит усвоить соответствующий раздел дискретной математики и приобрести необходимые практические навыки.

Научный редактор О.П.Тимофеева
Редактор Э.Б. Абросимова

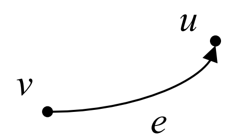
Подп. в печ. .Формат 60х84 $^1/16$. Бумага газетная. Печать офсетная. Печ.л. 1 Уч.-изд.л. 0,5. Тираж 200 экз. Заказ.

Нижегородский государственный технический университет.
Типография НГТУ.603950Н.Новгород,ул.Минина,24.

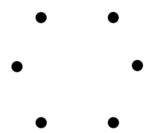
# 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Пусть $V$ - **множество вершин**, множество соединенных некоторым образом точек. Элементы $v \in V$ множества $V$ - **вершины**. **Граф** $G=G(V)$ с множеством вершин $V$ - некоторое отношение на множестве $V \otimes V$.

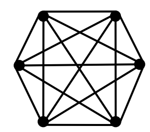
Если $e=(v, u) \in G$, то вершины $v$ и $u$ смежные, т.е. соединены ребром $e$. При этом ребро $e$ **инцидентно** вершинам $v$ и $u$, а вершины $v$ и $u$ - ребру $e$.




Вершина, не имеющая инцидентных ребер, называется **изолированной**. Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется **0-графом**. Граф, содержащий все возможные ребра, называется **полным**.

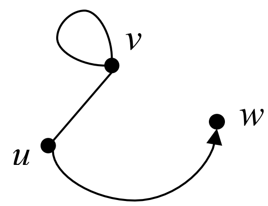


0-граф



полный граф

Если $(v, u) = (u, v)$ – ребро неориентировано, если $(u, w) \neq (w, u)$ – ребро ориентировано и называется **дугой**. **Петля** $(v, v)$- дуга, у которой совпадают начало и конец.




Граф, состоящий только из ребер, называется **неориентированным**, и **ориентированным**(или **орграфом)**, если он состоит только из дуг. Граф, состоящий из дуг и ребер, называется **смешанным**.

Два графа $G_1$ и $G_2$ называются **изоморфными**, если $V_1=V_2$ и в графе $G_2$ существует дуга $(v, u)$ тогда и только тогда, когда дуга $(v, u)$ существует в графе $G_1$.

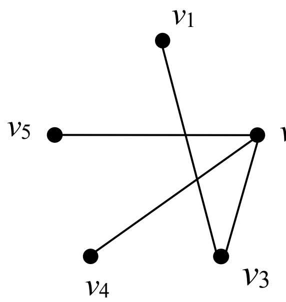
**Дополнением графа** $G(V)$ называется граф $\overline{G}(V)$, ребра и дуги которого, будучи добавленными к $G$, образуют полный граф.

Граф $G^{-1}$ называется **обратным** к графу $G$, если все дуги в нем имеют противоположное направление по сравнению с графом $G$.

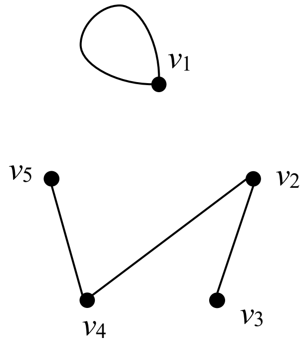
Граф называется **плоским** (**планарным**), если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются его вершинами.

## 2. ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

Пусть даны два графа: граф $G_1$ с множеством вершин $V_1$ и множеством



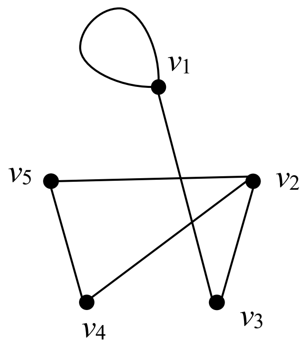

***G*1**



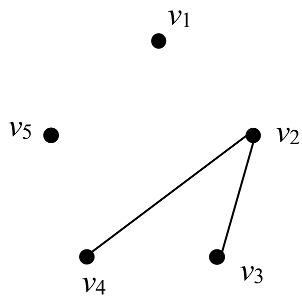

***G*2**

ребер $E_1$ и граф $G_2$ с множеством вершин $V_2$ и множеством ребер $E_2$.

1. **Объединением (суммой) графов** $G_1$ и $G_2$ называется граф $G=G_1\cup G_2$, с множеством вершин $V=V_1\cup V_2$ и множеством ребер $E=E_1\cup E_2$.
2. **Пересечением (произведением) графов** $G_1$ и $G_2$ называется граф $G=G_1\cap G_2$, с множеством вершин $V=V_1\cap V_2$ и множеством ребер $E=E_1\cap E_2$.




$\boldsymbol{G=G_1\cup G_2}$

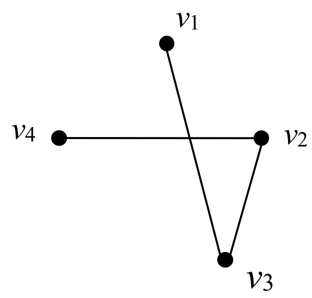


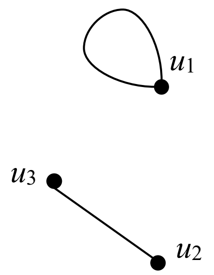

$\boldsymbol{G=G_1\cap G_2}$

3. **Декартовым произведением графов** $G_1$ и $G_2$ называется граф $G=G_1\otimes G_2$, с множеством вершин $V=V_1\otimes V_2$.

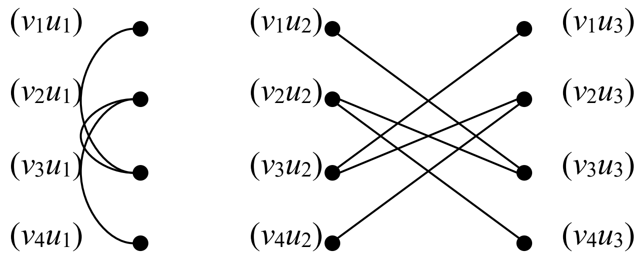
Вершина $(v_1, u_1)$ смежна с вершиной $(v_2, u_2)$ в графе $G$ тогда и только тогда, когда в графе $G_1$ смежны $v_1$ и $v_2$, а в графе $G_2$ смежны $u_1$ и $u_2$.

4. **Декартовой суммой графов** $G_1$ и $G_2$ называется граф $G=G_1\oplus G_2$, с множеством вершин $V=V_1\otimes V_2$. Вершина $(v_1, u_1)$ смежна с вершиной $(v_2, u_2)$ в графе $G$ тогда и только тогда, когда либо в графе $G_1$ смежны $v_1$ и $v_2$, либо в графе $G_2$ смежны $u_1$ и $u_2$.

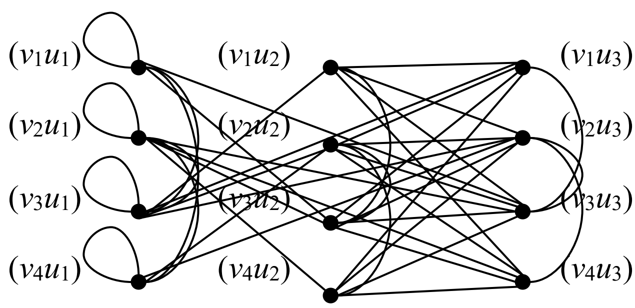



$\boldsymbol{G_1}$ $\boldsymbol{G_2}$




$\boldsymbol{G=G_1\otimes G_2}$

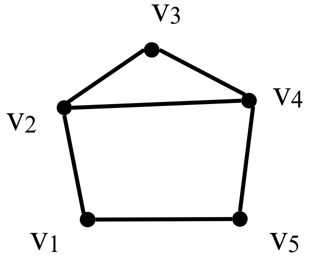



$\boldsymbol{G=G_1\oplus G_2}$

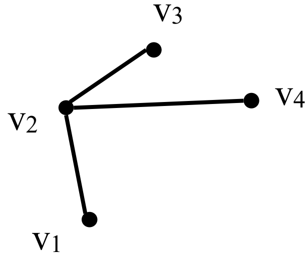
5. **Транзитивным замыканием** нетранзитивного графа $G(V)$ называется граф $G^*(V)$, полученный добавлением для каждой пары дуг $(x, y)$, $(y, z)$ замыкающей дуги $(x, z)$.

## 3. ЧАСТИ И ПОДГРАФЫ

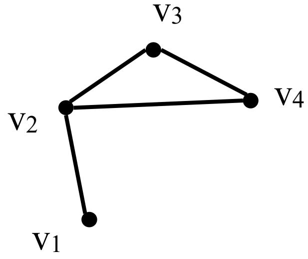
Граф $H$ называется **частью графа** $\boldsymbol{G}$ и обозначается $\boldsymbol{H\subset G}$, если множество $V_H\subset V_G$, $E_H\subset E_G$.




G($V_G$)




H(A)

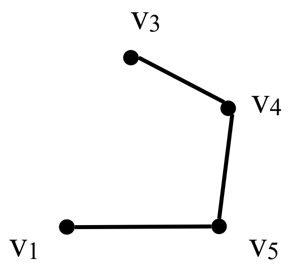



G(A)

Если $A \subset V_G$,**подграфом** ***G(A)*** называется часть графа, множеством вершин которой является $A$, а ребрами – все ребра $G$, оба конца которых лежат в $A$.

**Звездой, определяемой вершиной *v***, называется часть, состоящая из всех ребер, инцидентных ***v***.

**Дополнение** части ***H*** **(**$\overline{H}$**)** включает все ребра $G$, не вошедшие в $H$.




$\overline{H}(A)$

Часть $H$ покрывает граф $G$, т.е.является **покрывающим суграфом *G***, если любая вершина $G$ является концом, по крайней мере, одного ребра из $H$.

## 4. ЛОКАЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ

Граф называется **конечным**, если число вершин и ребер в нем конечно, **бесконечным** – в противном случае.

1. Пусть $G$ - неориентированный граф

Число ребер **ρ*(v)***, инцидентных вершине ***v***, назовем **локальной степенью графа в вершине *v***.

Если для $\forall v \in V$ значения $\rho(v)$ конечны, то граф называется **локально конечным**.

Обозначим $\rho(v,u) = \rho(u,v)$ – это число ребер, соединяющих вершины $v$ и $u$, т.е. это **кратность ребра (*v,u*)**. Тогда

$$\rho(v) = \sum_{u \in V} \rho(v,u)$$

Обозначим $m(G)$ – число ребер в графе $G$. Так как каждое ребро будет учитываться в двух локальных степенях $v$ и $u$, то запишем:

$$2m = \sum_{v \in V} \rho(v) = \sum_{v,u \in V} \sum \rho(v,u)$$

**Теорема 1:**

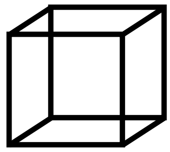
Число вершин нечётной локальной степени в графе чётно.

Граф называется **однородным степени *k***, если локальные степени всех его вершин равны ***k***: $\forall v \in V \rho(v) = k$

Для однородных графов можно записать:

$$m(G)=\frac{1}{2}n\cdot k,$$

где $n$ – число вершин графа, $k$ – его степень.
Для куба:



$$m(G)=\frac{1}{2}8\cdot 3=12$$

2.Пусть $G$ –орграф

Обозначим:

- $od(v)$ – число дуг, выходящих из $v$;
- $id(v)$ – число дуг, заходящих в $v$.
- $\rho_o\ (v, u)$ – число дуг, направленных из $v$ в $u$;
- $\rho_i\ (v, u)$ – число дуг, направленных из $u$ в $v$.

Очевидно, $\rho_0(v,u)=\rho_i(u,v)$,

$$od(v)=\sum_{u\in V}\rho_0(v,u),$$

$$id(v)=\sum_{u\in V}\rho_i(v,u),$$

$$m=\sum_{v\in V}od(v)=\sum_{v\in V}id(v).$$

Граф называется **однородным степени *k***, если для $\forall v\in V$ выполняется следующее:

$$od(v) = id(v) = k.$$

В этом случае:

$$m(G)=nk.$$

## 5.ЦЕПИ И ЦИКЛЫ ГРАФОВ

Пусть $G$ - неориентированный граф.

**Маршрутом** в графе $G$ называется такая конечная или бесконечная последовательность рёбер$S$=($e_0$, $e_1$, $e_2$, …, $e_n$, …), в которой каждые 2 соседних ребра имеют общую концевую точку.

Если $e_0$ = ($v_0$,$v_1$) и $e_0$ – первое ребро маршрута, то $\boldsymbol{v_0}$ – **начальнаявершина** маршрута.

Если маршрут конечен и $e_n$ = ($v_n$,$v_{n+1}$) – последнее ребро маршрута, то вершина $\boldsymbol{v_{n+1}}$ – **конечнаявершина** маршрута. Любая вершина маршрута, кроме $v_0$ и $v_{n+1}$, называется **промежуточной**.

Если маршрут состоит из $n$рёбер, то он имеет **длину *n***.

Пусть $S=S(a_0, a_n)$ – маршрут, соединяющий вершины $a_0$ и $a_n$. Если $a_0=a_n$, то маршрут**циклический.**

Часть маршрута между вершинами$a_i$ и $a_j$ называется **участком**.Маршрут называется **цепью**, а циклический маршрут **циклом**, если он не содержит повторяющихся рёбер.

Нециклическая цепь называется **простой цепью**, если в ней ни одна вершина не повторяется.

**Цикл** называется **простым**, если в нем повторяется только начальная вершина (которая совпадает с конечной).В орграфе ориентированная цепь называется **путем**, а ориентированный цикл – **контуром.**

**Простой путь** – это цепь без повторяющихся вершин.

## 6. СВЯЗНОСТЬ НА ГРАФАХ

Пусть $G$ – неориентированный граф. Вершины $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u}$ называются **связанными**, если существует маршрут с концами в $v$ и $u$. Если этот маршрут проходит через некоторую вершину $\boldsymbol{a}$ более одного раза, то, удалив циклический участок, можно получить простую цепь, соединяющую $v$ и $u$.

Граф называется **связным**, если любая пара вершин в нем связана.

Отношение связанности обладает свойствами: рефлексивность,симметричность, транзитивность.Тогда оно разбивает $V$ на непересекающиеся классы эквивалентности:

$$V = \bigcup_i V_i,$$

где в один класс попадают связанные вершины, и никакие две вершины из разных классов между собой не связаны.Это означает, что сам граф разбивается на совокупность связных подграфов с непересекающимися множествами вершин:

$$G(V) = \bigcup_i G(V_i).$$

Соответственно,$V_i \cap V_j = \varnothing, i \neq j, \forall i, j.$

Подграфы $\boldsymbol{G(V_i)}$ называются **связными компонентами** графа $G$.

**Теорема 2:**

Каждый неориентированный граф единственным образом распадается на прямую сумму своих связных компонент.

**Теорема 3:**

Если в конечном графе $G$ ровно две вершины $v$ и $u$ имеют нечетную локальную степень, то они связаны.

**Теорема 4:**

Если граф $G$ с однократными рёбрами и без петель имеет $n$ вершин и $q$ связных компонент, то максимальное число рёбер в графе $G$ равно

$$N(n,q) = \frac{1}{2}(n-q)(n-q+1).$$

**Следствие:**

Граф с *n* вершинами и с числом рёбер большим, чем

$$N(n,2)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

связен.

## 7. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ГРАФЫ

**Нулевому отношению**, которое не выполняется ни для одной пары элементов, соответствует 0-граф.

**Универсальному отношению**, которое выполняется для любой пары элементов, соответствует полный неориентированный граф.

Граф $\overline{G}$ является **дополнительным** к $G$, если

$$(v,u)\in\overline{G}\Leftrightarrow(v,u)\notin G.$$

**Обратным** для отношения G называется отношение $G^{-1}$ , для которого $(v,u)\in G^{-1}\Leftrightarrow(u,v)\in G$.

Поскольку граф $G(V)$ – это некоторое отношение на множестве $V\otimes V$, то к графам применимы свойства бинарных отношений:

Рефлексивность ($\forall x{:}xRx$) соответвует наличию петли в каждой вершине графа.

Симметричность($\forall x, y{:}\ xRy\Rightarrow yRx$) соответствует наличиюребер и петель в графе.

Транзитивность ($\forall x, y, z{:}\ xRy, yRz\Rightarrow xRz$) требует для каждой пары дуг $(x,y)$ и $(y,z)$ транзитивно замыкающей дуги $(x,z)$.

Тождественность($\forall x, y{:}\ xRy, yRx\Rightarrow x=y$) соответствует наличию петель в графе при отсутствии ребер.

Полнота ($\forall x, y{:}\ xRy$ или $yRx$) означает, что любые две вершины в графе смежны.

## 8.МАТРИЦЫ ГРАФОВ

**Матрица инциденций**$\|h_{i,j}\|$ прямоугольная матрица $n\times m$, число строк которой равно числу вершин $n$, а число столбцов - числу ребер $m$.

Для неориентированного графа выполняется соотношение:

$$h_{ij}=\begin{cases}1,\ \text{если } i\text{ - я вершина инцидентна ребру } j,\\ 0\text{ - в противном случае.}\end{cases}$$

Матрица инциденций для орграфа строится по правилу:

$$h_{ij}=\begin{cases}1,\ \text{если вершина } i \text{ начальна для ребра } j,\\ -1,\ \text{если вершина } i \text{ конечна для ребра } j,\\ 0,\ \text{если вершина } i \text{ и ребро } j \text{ не инцидентны.}\end{cases}$$

**Матрица смежности** $C$ **-** это квадратная матрица ($n$×$n$), в которой

$$c_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если существует дуга } (v_i, v_j),\\ \quad 0 \text{ - в противном случае.}\end{cases}$$

Для мультиграфа элемент $c_{ij}$ соответствует числу дуг, направленных из $i$ в $j$.

Матрица смежности неориентированного графа симметрична.

**Матрица достижимости** графа $D$- это квадратная матрица $n$×$n$, у которой

$$d_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } v_j \text{ достижима из } v_i,\\ \quad 0 \text{ - в противном случае.}\end{cases}$$

**Алгоритм построения матрицы *D*:**

1. Пометить 1-ю строку матрицы $C$. В ней определить столбцы, содержащие 1, и пометить строки под этими же номерами.
2. К помеченным строкам применить эту же процедуру.
3. Логическое сложение всех помеченных строк даст 1-ю строку матрицы достижимости.
4. Применить шаги 1-3 к следующей строке.
5. Главную диагональ матрицы $D$ заполнить 1.

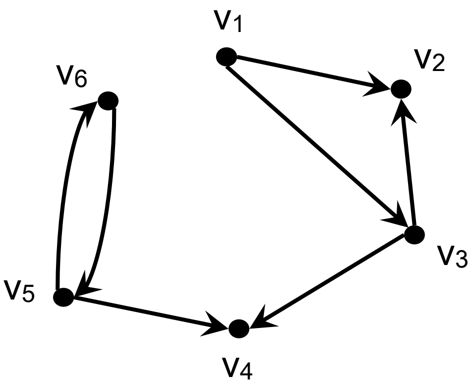
## 9. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФОВ СПИСКАМИ ИНЦИДЕНЦИИ

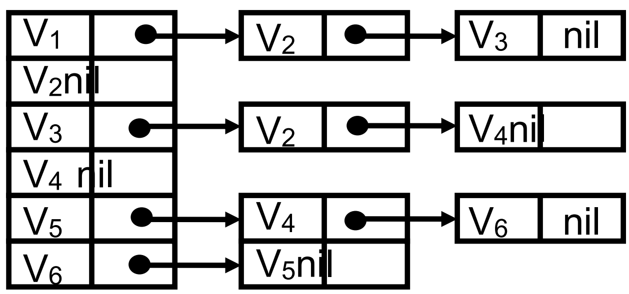
Для представления графа $G$ списками инциденции требуется сформировать общую **таблицу начал,** в которой представлены указатели на начало списков каждой из вершин графа $G$.

Каждая запись имеет минимум 2 поля:

-номер вершины, смежной с той, что приведена в таблице начал,

-указатель на следующую запись.




## 10. СЕТЕВЫЕ ГРАФИКИ

**Сетевые графики** - это графические модели сложных комплексов работ, которые представляют взаимосвязи работ в проекте. Сетевой график - это связный орграф без контуров и петель.

Основные элементы сетевого планирования: работа, событие.

**Работа** – это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата и требующий затрат каких-либо ресурсов, имеет протяженность во времени.

**Действительная работа** - работа, требующая затрат времени.

**Фиктивная работа** не требует затрат времени и представляет связь между какими-либо работами.

**Событие** – момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие, предпосылка для выполнения работ, следующих за ним.

На сетевом графике работы соответствуют дугам (фиктивные обозначаются пунктиром), а события - вершинам графа.

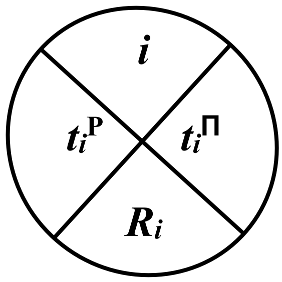
Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют **исходным**, **истоком**.

Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется **завершающим, стоком**.

**Промежуточное событие** – условие, означающее окончание всех работ, предшествующих данному событию и возможность начала выполнения последующих работ комплекса.

## 10.1. ВРЕМЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ СОБЫТИЙ

• **ранний срок наступления события** $\boldsymbol{it_i^{Р}}$ - это время, необходимое для выполнения всех работ, предшествующих данному событию $i$.




$$t_i^{Р} = \max\,(t_j^{Р} + t_{ji})$$

• **поздний срок наступления события** $\boldsymbol{it_i^{П}}$ – это такое время наступления события $i$, превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети.

$$t_i^{П} = \min\,(t_j^{П} - t_{ij})$$

• **резерв времени наступления события** $\boldsymbol{iR_i}$– это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление этого события без нарушения сроков завершения разработки в целом.

$$R_i = t_i^{П} - t_i^{Р}$$

**Путь–** это любая последовательность работ в сетевом графике, в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы.

**Полный путь**– это путь от исходного до завершающего события.

**Критический путь** - полный путь, имеющий наибольшую продолжительность по времени.

Суммарная продолжительность работ, принадлежащих критическому пути, составляет **критическоевремя**$\boldsymbol{t_{кр}}$– время выполнения комплекса работ в целом.

# 11. МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

**Марковской цепью** называется следующая вероятностная модель:

1. В каждый момент времени модель может находиться в одном из$n$ состояний:$S_1$, $S_2$, …, $S_n$. Иногда одно из состояний определено как начальное.

2. Для каждой пары состояний $S_i$ и $S_j$ определенывероятности перехода$P_{ij}$ из состояния $S_i$ состояние $S_j$ такие что:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1.$$

Марковскую модель можно задать ориентированным графом. Вершины графа будут соответствовать состояниям модели. Если число $P_{ij}$> 0, то в графе существует дуга ($S_i$, $S_j$). Данной дуге присваиваетсязначение $P_{ij}$.Полученный граф, называется **графом переходов марковской цепи**.

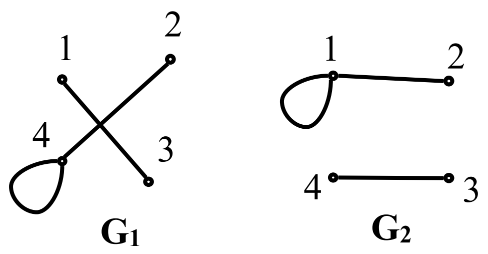
Также марковскую цепь можно задать с помощью матрицы размером$n \times n$с элементами $P_{ij}$. Полученная матрица называется**матрицей переходов марковской цепи.**

Марковская цепь моделирует вероятностный процесс, который разворачивается в дискретном времени.

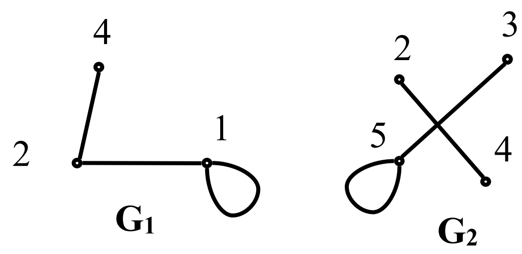
## УПРАЖНЕНИЯ

1. Определить объединение, пересечение, декартову сумму и декартово произведение графов $G_1(V_1)$ и $G_2(V_2)$:

А)




Б)




2. На множестве $M$={1, 2, 3, 4}построить графы отношенийR:

а) $R = \{(x, y) / x + y \leq 3\}$,

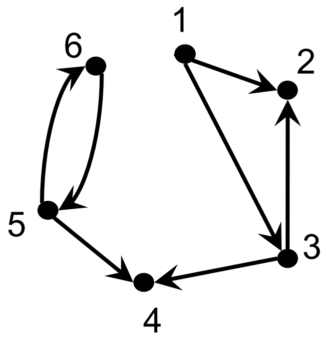
б) $R = \{(x, y) / x < 2y\}$, определить свойства графов.

3. Задано множество вершин $V$={$v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$}. Построить граф $G(V)$, обладающий одним из свойств: а) нерефлексивный; б) антисимметричный; в) транзитивный; г) нетождественный.Построить граф, обладающий парами

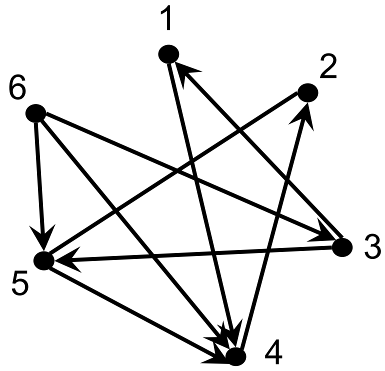
перечисленных свойств (а и б, а и в, и т.д). Для полученных графов построить $\overline{G}$, $G^{-1}$.

4. Построить граф пересечений граней куба. Для полученного графа составить матрицу инциденции $H$и матрицу смежности$C$.

5. Для исходных графов $G_1$ и $G_2$построить матрицы достижимости $D$:

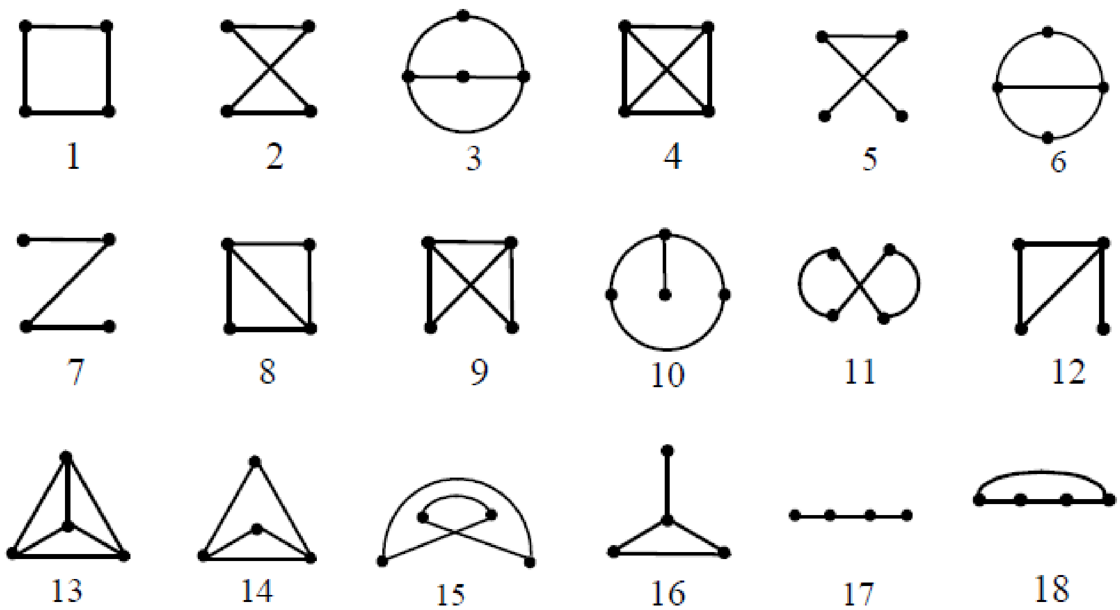



**G$_1$**




**G$_2$**

6. Разбить графы на группы изоморфных:




7. Исходный граф задан матрицей смежности $C$. Определить свойства графа.

$$C_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad C_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

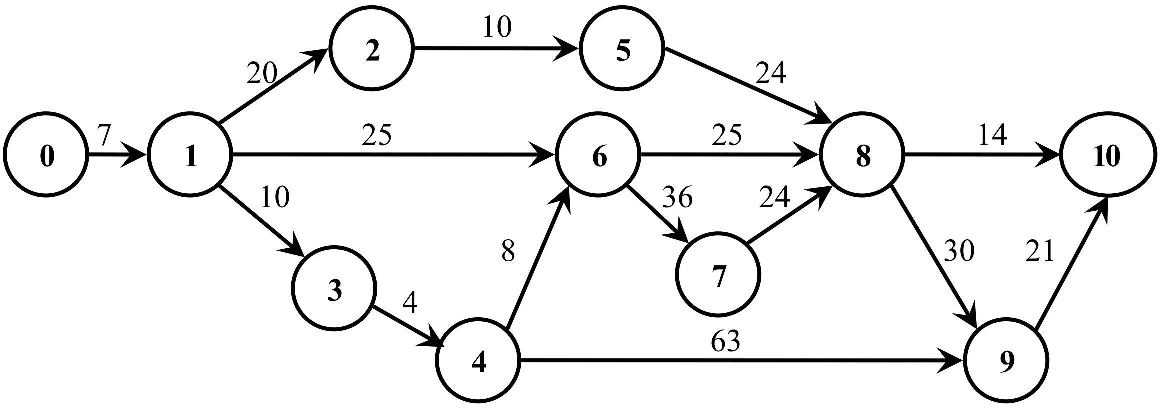
$\left|\begin{matrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{matrix}\right| \qquad\qquad \left|\begin{matrix}0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|$

8. Представить в виде сетевого графика и рассчитать его параметры ($t_i^{\text{Р}}, t_i^{\text{П}}, R_i, t_{\text{кр}}$):

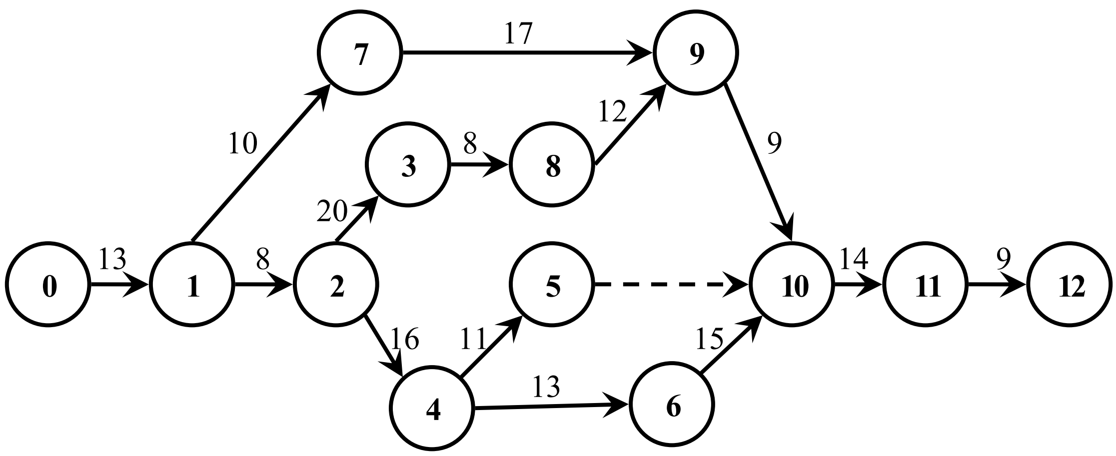
| код работы | продолжительность работы |
|---|---|
| 1-2 | 2 |
| 1-3 | 2 |
| 1-4 | 3 |
| 2-4 | 4 |
| 2-5 | 3 |
| 3-4 | 1 |
| 3-6 | 12 |
| 4-5 | 0 |
| 4-7 | 1 |
| 5-8 | 8 |
| 6-7 | 8 |
| 7-8 | 4 |
| 8-9 | 6 |

9. Рассчитать параметры сетевых графиков ($t_i^{\text{Р}}, t_i^{\text{П}}, R_i, t_{\text{кр}}$):

а)




б)



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Судоплатов С.В. Дискретная математика : учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова ; Новосиб.гос.техн.ун-т. - 2-е изд.,перераб. - М.; Новосибирск : ИНФРА-М; Изд-во НГТУ, 2005. - 256 с. - (Высшее образование).
2. Асеев Г.Г. Дискретная математика:учебное пособие/Г.Г.Асеев, О.М.Абрамов, Д.Э.Ситников. - Ростов н/Д:«Феникс», Харьков: «Торсинг», 2003. – 144 с. (Серия «Учебники»).
3. Шапорев С.Д. Дискретная математика:курс лекций и практических занятий /С.Д. Шапорев. - СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 400 с.: ил.

## СОДЕРЖАНИЕ