МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Р. Е. АЛЕКСЕЕВА»

Кафедра «Информатика и системы управления»

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Методические указания для студентов специальностей
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02
«Информационные системы и технологии», 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» дневной и очно-заочной форм обучения по дисциплине «Дискретная математика»

Нижний Новгород
2018

Составители: М.А. Степаненко, Э.С. Соколова, Т.И. Балашова

УДК 519.1 (075.5)

Комбинаторный анализ: методические указания для студентов специальностей 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» дневной и очно-заочной форм обучения по дисциплине «Дискретная математика»/ НГТУ им. Р.Е. Алексеева; сост.: М.А. Степаненко, Э.С. Соколова, Т.И. Балашова. Н.Новгород, 2018. 16 с.

Приводятся краткие сведения основ комбинаторного анализа, разобраны примеры решения задач. Подобраны задания для решения, которые могут использоваться при проведении практических занятий, а также для самостоятельного решения студентами специальностей 09.03.01, 09.03.02 и 10.05.03. Решение приведенных задач позволит усвоить соответствующий раздел дискретной математики и приобрести необходимые практические навыки.

Редактор Э.Б. Абросимова

Подп. к печ. 25.03.2018. Формат 60х84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная. Печ.л. 1,0. Уч.–изд.л. 0,8. Тираж 100 экз. Заказ.

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева.
Типография НГТУ.603950, Н. Новгород, ул. К.Минина, 24.

ПРАВИЛО СУММЫ

Если элемент a может быть выбран из множества H m способами, а элемент b другими t способами, то выбор **либо *a*, либо *b*** может быть выполнен ***m*+*t*** числом способов.

ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Если элемент a может быть выбран из множества H m способами и после каждого такого выбора элемент b может быть выбран t способами, то выбор пары элементов ***a* и *b*** в указанном порядке может быть выполнен ***m*·*t*** числом способов.

РАЗМЕЩЕНИЯ

Размещениями называются конфигурации, состоящие из m элементов множества $H = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, отличающиеся друг от друга либо элементами, либо их порядком.

Если в размещениях все элементы различны, то это **размещения без повторений** из n по m, вычисляемые по формуле

$$A(n, m) = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \qquad (1)$$

где n, m – натуральные числа.

$$A(n, 0) = 1.$$

Пример 1

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе не повторяются?

$$A(5, 3) = \frac{5!}{2!} = 60.$$

Если в размещениях каждый элемент может встречаться любое число раз от 0 до m, то это **размещения с повторениями** из n по m, вычисляемые по формуле

$$B(n, m) = n^m. \qquad (2)$$

Пример 2

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5? (Цифры в числе могут повторяться).

$$B(5,3) = 5^3 = 125.$$

ПЕРЕСТАНОВКИ

Перестановками называются конфигурации, включающие в себя все элементы множества $H = \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ и отличающиеся друг от друга только порядком элементов. Перестановки – это размещения при m=n.

$$P(n) = A(n,n) = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n! \qquad (3)$$

$$P(0) = 1.$$

Пример 3

Сколькими способами 5 человек могут стать в очередь друг за другом?

$$P(5) = 5! = 120.$$

Перестановки с повторениями из n элементов k типов, где n_1 элементов первого типа, n_2 - второго и т.д., n_k - k-го типа, т.е. $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, вычисляются по формуле

$$P(n, n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}. \qquad (4)$$

Пример 4

Сколько перестановок можно получить из букв слова ”знания”?

$$P(6,2,1,1,1,1,) = \frac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 360.$$

СОЧЕТАНИЯ

Сочетаниями называются конфигурации, состоящие из m элементов множества $H = \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$, отличающиеся друг от друга элементами, но не их порядком. Сочетания обозначаются $C(n,m)$.

Если в сочетании $C(n,m)$ упорядочить элементы всеми возможными способами, то из одного сочетания получится $m!$ различных размещений без повторений, т.е.

$$A(n,m) = m! \cdot C(n,m). \tag{5}$$

Отсюда получим формулу для **сочетаний без повторений** из n по m:

$$C(n,m) = \frac{A(n,m)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}. \tag{6}$$

$$C(n,0) = 1,$$

$$C(n,m) = 0, \text{ для } m > n.$$

Очевидно, что $C(n,m) = C(n, n-m)$.

Пример 5

Сколькими способами из группы в 24 человека можно выбрать троих делегатов на конференцию?

$$C(24,3) = \frac{24!}{21! \cdot 3!} = 2024.$$

Если в сочетаниях каждый элемент может встречаться любое число раз от 0 до m, то это **сочетания с повторениями** из n по m, вычисляемые по формуле

$$V(n,m) = C(n+m-1, m) = C(n+m-1, n-1) = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!}. \tag{7}$$

Пример 6

Вычислить число различных бросаний двух одинаковых кубиков.

$$V(6,2) = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21.$$

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ

Пусть имеется множество из n элементов, некоторые из которых обладают свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. При этом каждый элемент может не обладать ни одним из этих свойств, а может обладать одним или несколькими.

Обозначим $w(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$- количество элементов, обладающих свойствами $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $w(\alpha_i, \alpha_j, \overline{\alpha_t})$- количество элементов, обладающих свойствами α_i, α_j и не обладающих свойством α_t.

Число элементов, не обладающих ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, вычисляется по **формуле включения и исключения**:

$$\begin{aligned} w(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_k}) &= n - w(\alpha_1) - w(\alpha_2) - \ldots - w(\alpha_k) + w(\alpha_1, \alpha_2) + w(\alpha_1, \alpha_3) + \ldots + \\ &+ w(\alpha_{k-1}, \alpha_k) - w(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \ldots - w(\alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}, \alpha_k) + \ldots + (-1)^k w(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k). \end{aligned} \tag{8}$$

Пример 7

В классе учится 35 учеников. 20 из них занимаются в математическом кружке, 11 учеников - в биологическом, а 10 человек не интересуется ни математикой, ни биологией. Сколько ребят занимается и математикой, и биологией?

Введем обозначения:

α_1 *- свойство заниматься в математическом кружке,* α_2 *- свойство заниматься в биологическом кружке.*

$n = 35$, $w(\alpha_1) = 20$, $w(\alpha_2) = 11$, $w(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2) = 10$, $w(\alpha_1, \alpha_2) = ?$

$10 = 35 - 20 - 11 + w(\alpha_1, \alpha_2)$,

$w(\alpha_1, \alpha_2) = 6$.

БЕСПОРЯДКИ

Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ - перестановка из n элементов $1, 2, \ldots, n$. Эта перестановка называется **беспорядком**, если ни один из элементов не занимает своего естественного места, т.е. для всех $i = \overline{1, n}$ $a_i \neq i$. Число беспорядков из n элементов вычисляются по формуле

$$D_n = n! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right). \qquad (9)$$

Пример 8

Требуется отправить 6 разных писем шести различным адресатам. В скольких случаях ни одно из писем не попадет к своему адресату?

$$D_6 = 6! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \right) = 360 - 120 + 30 - 6 + 1 = 265.$$

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Производящей функцией последовательности $\{a_i\}$ называется функция $f(x)$ вида:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n + \ldots, \qquad (10)$$

где i-й член последовательности a_i является коэффициентом при x^i.

Экспоненциальная производящая функция имеет вид

$$f^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{11}$$

здесь i-й член последовательности a_i является коэффициентом при $\frac{x^i}{i!}$.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ СОЧЕТАНИЙ

Производящая функция сочетаний без повторений из n элементов по m имеет вид

$$f_c(x) = (1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} C(n,m)x^m \; . \tag{12}$$

Если каждый элемент может входить в сочетание любое число раз от 0 до m, то **производящая функция** для **сочетаний с повторениями** запишется:

$$f_c^*(x) = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^m\right)^n = \sum_{i=0}^{m} V(n,i)x^i \; . \tag{13}$$

Производящая функция позволяет установить некоторые свойства сочетаний:

$$\sum_{m=0}^{n} C(n,m) = 2^n, \tag{14}$$

$$C(n+1,k) = C(n,k) + C(n,k-1). \tag{15}$$

Пример 9

Найти число сочетаний и сами сочетания из трех элементов a_1, a_2, a_3*, если элемент* a_3 *может встречаться в сочетании 0, 1 или 2 раза.*

$$f_c(x) = (1+x)(1+x)\left(1+x+x^2\right) = 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + x^4.$$

Отсюда $C(3,0)=1$, $C(3,1)=3$, $C(3,2)=4$, $C(3,3)=3$, $C(3,4)=1$.

Сами сочетания: $[a_1]$, $[a_2]$, $[a_3]$; $[a_1, a_2]$, $[a_1, a_3]$, $[a_2, a_3]$, $[a_3, a_3]$;

$[a_1, a_2, a_3]$, $[a_1, a_3, a_3]$, $[a_2, a_3, a_3]$; $[a_1, a_2, a_3, a_3]$.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЙ

Производящая функция размещений без повторений из n элементов по m является экспоненциальной и имеет вид

$$f_p(x) = (1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} A(n,m)\frac{x^m}{m!}\; . \tag{16}$$

Если каждый элемент может входить в размещение любое число раз от 0 до m, то **производящая функция** для **размещений с повторениями** запишется:

$$f_p^*(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!}\right)^n = \sum_{k=0}^{m} B(n,k)\frac{x^k}{k!}. \qquad (17)$$

Пример 10

Найти число размещений и сами размещения из трех элементов a_1, a_2, a_3*, если элемент* a_3 *может встречаться в сочетании 0, 1 или 2 раза.*

$$f_p(x) = (1+x)(1+x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) = 1 + 3x + \frac{7x^2}{2!} + \frac{12x^3}{3!} + \frac{12x^4}{4!}.$$

Отсюда $A(3,0)=1$, $A(3,1)=3$, $A(3,2)=7$, $A(3,3)=12$, $A(3,4)=12$.

Сами размещения: $[a_1]$, $[a_2]$, $[a_3]$;

$[a_1, a_2]$, $[a_2, a_1]$, $[a_1, a_3]$, $[a_3, a_1]$, $[a_2, a_3]$, $[a_3, a_2]$ $[a_3, a_3]$;

$[a_1, a_2, a_3]$, $[a_1, a_3, a_2]$, $[a_2, a_1, a_3]$, $[a_2, a_3, a_1]$, $[a_3, a_1, a_2]$, $[a_3, a_2, a_1]$, $[a_1, a_3, a_3]$, $[a_3, a_1, a_3]$, $[a_3, a_3, a_1]$, $[a_2, a_3, a_3]$, $[a_3, a_2, a_3]$, $[a_3, a_3, a_2]$;

$[a_1, a_2, a_3, a_3]$, $[a_1, a_3, a_2, a_3]$, $[a_1, a_3, a_3, a_2]$, $[a_2, a_1, a_3, a_3]$, $[a_2, a_3, a_1, a_3]$, $[a_2, a_3, a_3, a_1]$, $[a_3, a_1, a_2, a_3]$, $[a_3, a_1, a_3, a_2]$, $[a_3, a_2, a_1, a_3]$, $[a_3, a_2, a_3, a_1]$, $[a_3, a_3, a_1, a_2]$, $[a_3, a_3, a_2, a_1]$.

РАЗБИЕНИЯ

Разбиением называется набор целых положительных чисел, имеющий заданную сумму, где порядок слагаемых не важен. Целые числа, образующие разбиение, называются частями, а сумма частей – характеристикой разбиения. Число разбиений можно определить с помощью производящей функции:

$$\rho(x) = \rho_0 + \rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots, \qquad (18)$$

где ρ_i - число разбиений характеристики i.

Функция для разбиений частями 1, 2, 3, … выглядит так:

$$\rho(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)\cdot \dots\ . \qquad (19)$$

Пример 11

Найти число разбиений характеристики 5 с нечетными частями.

$$\rho(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x^3)(1 + x^5) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5.$$

Коэффициент при x^5 равен 3. Существует 3 разбиения числа 5 нечетными частями:
[5]; [3, 1^2]; [1^5].

КОМПОЗИЦИИ

Композицией называется упорядоченная последовательность целых положительных чисел, имеющих заданную сумму. Производящая функция композиций с k частями имеет следующий вид:

$$\varphi_k(x) = \left(x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots\right)^k = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \,. \tag{20}$$

Пример 12

Найти число композиций характеристики 5 с нечетными частями.

$\varphi_1(x) = x + x^3 + x^5$ — 1 *композиция*: [5];

$\varphi_2(x) = \left(x + x^3 + x^5\right)^2 = x^2 + 2x^4 + 3x^6 + \dots$ — *нет композиций*;

$\varphi_3(x) = \left(x + x^3 + x^5\right)^3 = x^3 + 3x^5 + \dots$ — 3 *композиции*: [311], [131], [113];

$\varphi_4(x) = \left(x + x^3 + x^5\right)^4 = x^4 + 4x^6 + \dots$ — *нет композиций*;

$\varphi_5(x) = \left(x + x^3 + x^5\right)^5 = x^5 + \dots$ — 1 *композиция*: [11111].

Существует 5 композиций числа 5 нечетными частями.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПЕРЕСТАНОВКИ

Возьмем перестановку из n элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, выделим в ней подмножества элементов и будем считать перестановку неизменной, если нарушение стандартного порядка внутри каждого подмножества не нарушает циклического порядка.

Такая перестановка называется **циклической перестановкой**, выделенные множества – циклами, число элементов в цикле – длиной цикла.

Перестановка из n элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ имеет класс $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, если она содержит k_1 единичных циклов, k_2 - циклов длины 2, и т.д., k_n - циклов длины n.

Число циклических перестановок вычисляется по формуле

$$P(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot .... \cdot k_n! \cdot 1^{k_1} \cdot 2^{k_2} \cdot ... \cdot n^{k_n}}. \qquad (21)$$

Пример 13

Сколькими способами можно поставить в хоровод 10 детей?

$$P(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1) = \frac{10!}{0! \cdot 0! \cdot .... \cdot 1! \cdot 1^0 \cdot 2^0 \cdot ... \cdot 10^1} = \frac{10!}{10} = 9! = 362880.$$

РАЗБИЕНИЯ НА ГРУППЫ

Если требуется разделить n одинаковых предметов на k групп, то число способов рассчитывается по формуле для перестановок:

$$P(n+k-1, n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{n! \cdot (k-1)!} = C(n+k-1, n) = C(n+k-1, k-1) = V(k, n) \qquad (22)$$

либо по формуле (20) для композиций характеристики n с k частями.

Если требуется разделить n **одинаковых** предметов на k групп так, чтобы в каждой группе оказалось не менее r предметов, то число способов рассчитывается по формуле для перестановок:

$$\begin{aligned} P(n-rk+k-1, n-rk, k-1) &= \frac{(n-rk+k-1)!}{(n-rk)! \cdot (k-1)!} = C(n-rk+k-1, n) = \\ &= C(n-rk+k-1, k-1) = V(k, n-rk). \end{aligned} \qquad (23)$$

Пример 14

Сколькими способами можно разделить 20 *яблок между тремя детьми?*

$$V(3,20) = \frac{22!}{20! \cdot 2!} = 231$$

либо с помощью формулы для композиций характеристики 20 *с тремя частями*:

$$\varphi_3(x) = (x + x^2 + x^3 + ... + x^{20})^3 = ... + 231x^{20} + ...$$

Если требуется разделить n **различных** предметов на k групп так, чтобы в каждой группе оказался хотя бы 1 предмет, то число способов определяется по формуле включения и исключения (8), в которой $n = B(k, n)$ - все возможные распределения n различных предметов, α_i - такое разделение предметов, при котором в i-й группе окажется 0 предметов:

$$\begin{aligned} w(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_k) = B(k,n) - C(k,1)B(k-1,n) + C(k,2)B(k-2,n) - \\ C(k,3)B(k-3,n) + ... + (-1)^{k-1}C(k,k-1)B(1,n). \end{aligned} \qquad (24)$$

Пример 15

Сколькими способами можно разделить 8 разных книг на троих читателей, чтобы каждый получил хотя бы по одной книге?

$n = B(3,8)$ - все возможные распределения книг на троих; α_1 - такое распределение, при котором первый читатель не получит ни одной книги; α_2 - второй не получит ни одной книги; α_3 - третий не получит ни одной книги.

$w(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3) = B(3,8) - C(3,1)B(2,8) + C(3,2)B(1,8) = 3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 = 5796$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Имеется текст, написанный на неизвестном языке, использующий 26 знаков. Эти знаки соответствуют некоторым звукам. Сколько способов сопоставления звукам букв существует? Сколько способов сопоставления существует, если есть возможность отличить 10 гласных от 16 согласных?
2. ЭВМ имеет ячейку, состоящую из 43 разрядов, в каждый из которых можно записать 0 или 1. Сколько различных чисел можно записать в ячейку?
3. Знаки азбуки Морзе есть точки и тире. Сколько нужно использовать знаков одновременно, чтобы записать 32 буквы русского алфавита?
4. Имеется партия из n изделий, из которых m бракованных. Из партии случайным образом выбирается k изделий. Сколько существует вариантов выбора k изделий, так чтобы среди них было l бракованных?
5. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбирать 2 кости, так чтобы их можно было приложить друг к другу?
6. Сколько существует способов распределения золотой, серебряной и бронзовой медалей между 18 командами?
7. В продаже имеется 6 видов аккумуляторных батарей. Сколькими способами можно купить 9 батарей?
8. Сколько существует способов размещения автомобилей в колонну, если имеется 4 автомобиля КРАЗ, 5 МАЗ, 9 КАМАЗ, 6 ГАЗ?
9. Сколько способов расстановки 5 нулей и 3 единиц, так чтобы никакие 2 единицы не стояли рядом?
10. Фотограф выстраивает в ряд 5 юношей и 3 девушек. Сколькими способами возможна расстановка, если никакие 2 девушки не должны стоять рядом?

11. Составляются знаки, состоящие из геометрической фигуры (окружность, квадрат, треугольник, ромб), буквы и цифры в различном порядке. Сколько таких знаков можно построить?

12. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколько способов выбора существует, если каждый человек может занять только один пост?

13. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

14. В седьмом классе изучается 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков?

15. Автомобильные номера состоят из трех букв (всего используется 12 букв), трех цифр (используются все 10 цифр) и номера региона. Сколько автомобилей можно занумеровать в Нижегородской области, таким образом, чтобы никакие два автомобиля не имели одинакового номера?

16. Участники кружка решили написать номера из цифр трех цветов: на первом месте - три цифры красного цвета, на втором - две цифры желтого цвета, на третьем - четыре зеленых. Сколько всего номеров можно написать, если красным цветом можно записать 1, 2, 3, 4, 6, желтым - 0, 2, 5, 7, а зеленым - 1,3,5,6,7,8,9?

17. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, стал набирать их наудачу. Сколько вариантов ему надо перебрать, чтобы набрать нужный номер?

18. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5,6 при условии, что в числе цифры не повторяются.

19. Для дежурства в классе в течение недели (кроме воскресенья) выделены 6 учащихся. Сколькими способами можно установить очередность дежурств, если каждый учащийся дежурит один раз?

20. Известно, что крокодил имеет не более 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух крокодилов с одним и тем же набором зубов.

21. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причем первый и третий должны написать по 5 глав, второй - 4, а четвертый 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?

22. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно образовать из 14 преподавателей?

23. В чемпионате страны по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько игр состоится в течение сезона?

24. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом (шары одного цвета неотличимы друг от друга)?

25. На первой из двух параллельных прямых лежит 10 точек, на второй - 20. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

26. В урне 10 белых шаров, 8 черных и 12 красных. Из урны вынуто 5 шаров. Сколькими способами можно извлечь 5 шаров так, чтобы среди них было 2 белых, 2 черных и 1 красный?

27. В классе учится 50 человек, в том числе 25 мальчиков, 30 школьников учится на 4 и 5, из них 16 мальчиков. Спортом занимается 28 учеников, в том числе 18 мальчиков и 17 школьников, занимающихся на 4 и 5. 15 мальчиков учится на 4 и 5 и занимается спортом. Сколько девочек не занимается спортом и имеет двойки и тройки?

28. Показать, используя производящую функцию сочетаний, что

$$\sum_{m=0}^{n} C(n,m) = 2^n.$$

29. Показать, что если A - множество, состоящее из n элементов, то множество

всех его подмножеств $R(A)$ состоит из 2^n элементов.

30. Имеется 10 пунктов назначения, по которым требуется отправить 10 различных грузов. Определить, в скольких случаях ни один из грузов не поступит по назначению.

31. Некоторое сообщение может быть передано с помощью сигналов трех типов. Первый сигнал требует для своей передачи 3 с, второй - 5 с, третий - 1 с. Сколько различных сообщений можно передать с помощью этих сигналов за 10 с?

32. Сколькими способами можно разменять один рубль?

33. В кошельке 7 монет по 5 коп и 3 монет по 10 коп. Сколькими способами можно уплатить сумму в 55 коп?

34. Сколькими способами можно разделить 10 станков между тремя цехами так, чтобы каждый из них получил хотя бы по одному станку?

35. Сколькими способами можно распределить между тремя цехами 10 станков типа *A,* 10 станков типа *B,* и 8 станков типа С так, чтобы каждый цех получил хотя бы по одному станку каждого типа?

36. Сколькими способами можно разместить 8 контейнеров на 5 железнодорожных платформах так, чтобы на каждой платформе был установлен хотя бы один контейнер?

37. На полке находится 6-томное собрание сочинений. Сколькими способами можно переставить книги так, чтобы ни один том не стоял на своем месте?

38. В НИИ работает 670 человек. Из них 470 человек знают английский язык, 350 - немецкий и 230 - оба языка. Сколько человек в институте не знают ни немецкого, ни английского языка?

39. Сколько вариантов расстановки семи различных предметов в круг?

40. Сколько способов расстановки пятнадцати красных и девяти черных шаров в круг так, чтобы черные шары не стояли рядом?

41. Сколько способов расстановки семи танцовщиц и трех танцовщиков в круг так, чтобы танцовщики не стояли рядом?

42. Имеется 10 столов, за четырьмя из них сидит по 5 человек, за тремя по 7, за двумя по 2 и за одним - один человек. Сколько существует способов перегруппировки людей так, чтобы каждый раз хотя бы один из них имел нового соседа? Количество столов и их заполненность считать постоянными.

43. Сколькими способами можно разместить элементы множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

44. Сколькими способами можно выбрать из колоды в 52 карты тройку, семерку и туза?

45. Сколькими способами можно составить 3-полосный трехцветный флаг, если имеется материал 5 различных цветов? Если одна из полос обязательно должна быть красной?

46. Сколько слов-палиндромов длины, не превосходящей k, можно составить из алфавита, содержащего n букв (слово – любая совокупность букв)? k=7, n=5.

47. Начальник транспортного цеха пригласил несколько человек на совещание. Каждый участник совещания, входя в кабинет, пожимал руки всем присутствующим. Сколько человек участвовало в совещании, если было всего 78 неповторяющихся рукопожатий?

48. Сколько пятизначных чисел делится на “5”?

49. Сколько существует 8-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая строго меньше предыдущей)?

50. Сколько семизначных чисел не содержат цифры “2”? Не содержат цифры “0”?

51. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

52. Сколько существует 3-значных чисел, в запись которых входит ровно одна цифра “5”?

53. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

54. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного короля, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риордан Д. Введение в комбинаторный анализ / Д. Риордан. - М: Иностранная литература, 1963.
2. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. - М.: Наука, 1969.
3. Судоплатов С. В. Дискретная математика : учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова ; Новосиб.гос.техн.ун-т. - 2-е изд.,перераб. - М.; Новосибирск : ИНФРА-М; Изд-во НГТУ, 2005. - 256 с. - (Высшее образование).
4. Асеев Г.Г. Дискретная математика: учебное пособие / Г. Г. Асеев, О. М. Абрамов, Д. Э. Ситников. - Ростов н/Д:”Феникс”, Харьков: “Торсинг”, 2003. – 144 с. (Серия “Учебники”).
5. Шапорев С. Д. Дискретная математика: курс лекций и практических занятий / С. Д. Шапорев. - СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 400 с.: ил.

СОДЕРЖАНИЕ