Министерство образования Российской Федерации
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Основы теории множеств

Методические указания к изучению курса «Дискретная математика»
и решению задач для студентов специальностей 2202, 0719

Раздел 1

Нижний Новгород
2002

Составитель М. Е. Бушуева

УДК 519.5(075.5)

Основы теории множеств: Метод. указания к изучению курса «Дискретная математика» и решению задач для студентов спец. 2202, 0719. Раздел 1/ НГТУ; Сост.:М.Е. Бушуева. Н. Новгород, 2002. 18 с.

Данные методические указания являются вспомогательным материалом для изучения курса «Дискретная математика» и предназначены для самостоятельной проработки при подготовке к практическим занятиям.

Ответственный за выпуск В.И. Сагунов

Редактор И.И. Морозова

Подп. 25.12.01. Формат 60x84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная. Печ.л. 1,25. Уч. –изд.л. 1,0. Тираж 500 экз. Заказ 16.

Нижегородский государственный технический университет.
Типография НГТУ. 603600, Н. Новгород, ул. Минина, 24.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Математическое понятие ***множества*** постепенно выделилось из привычных представлений о совокупности, классе, семействе и т.д. Мы будем называть ***множеством*** *всякую совокупность различных объектов, различимую нашей интуицией или мыслью (Кантор).*

Множества обозначаются большими латинскими буквами A, B, C а его элементы малым латинскими $a, в, c, \ldots, x, y, z$. Например, $A = \{a, в, c\}$. Если элемент x принадлежит множеству A, то это обозначается: $x \in A$, в противном случае $x \notin A$.

Множество называется ***конечным***, если состоит из конечного числа элементов, и ***бесконечным*** в противном случае.

Задать множество можно одним из следующих способов:

1. Перечислить все его элементы, например $A = \{x, y, z\}$. Однако такое задание невозможно даже для конечных множеств, если они достаточно велики.
2. Каждый элемент задаваемого множества может быть определен по некоторому элементу уже известного множества с помощью определенного правила. Например, если считать известным множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, то можно задать множество степеней числа 2, т.е. $\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^n\}$.
3. Множество может быть задано с помощью некоторого ограничительного свойства. Например: множество корней уравнения, множество всех целых чисел, множество точек окружности и т.д.
4. Множество может быть задано с помощью операций над другими множествами.

Множество U мы будем называть ***универсальным*** (универсумом), если оно содержит все элементы рассматриваемого типа. Множество, не содержащее ни одного элемента, мы будем называть ***пустым*** и обозначать $\varnothing$. Например: пустое множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$. Множество E называется ***подмножеством*** множества F (обозначается $E \subset F$), если любой элемент E принадлежит F . Например: множество натуральных чисел N есть подмножество целых чисел, а множество целых чисел есть подмножество множества рациональных чисел, которое является подмножеством множества действительных чисел:

$$N \subset C \subset R \subset D$$

Каждое множество A есть подмножество самого себя. Кроме того, пустое множество есть подмножество всякого другого. Само множество A и пустое множество называются ***несобственным подмножеством*** множества A, а все остальные подмножества - ***собственными подмножествами*** A.

Множеством подмножеств множества A называется множество $R(A)$, элементами которого являются все подмножества, собственные и несобственные, множества A. Если число элементов множества A равно n , то число элементов $R(A)$ равно 2^n.

Будем говорить, что $A = B$, если $A \subset B$, $B \subset A$. Обратно, если $A \subset B$, $B \subset A$, то $A = B$.

2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ И ИХ СВОЙСТВА

Дополнение множества. Пусть $F \subset E$. Дополнением множества F до E называется множество $\overline{F_E}$, состоящее из элементов, принадлежащих E, но не принадлежащих F (рис. 1), т.е.

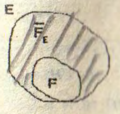


Рис. 1

$$\overline{F_E} = \{x / x \in E, x \notin F\}.$$

Если $E = U$, где U - универсум, то дополнение $\overline{F_E}$ обозначается $\overline{F}$ и называется просто дополнением F.

Пересечение множеств. Пересечением множеств A и B называется множество $C = A \cap B$, состоящее из элементов, принадлежащих обоим множествам A и B (рис. 2). Пересечение множеств $X_1,..., X_n$ определяется аналогично и обозначается

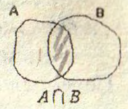


Рис. 2

$$X = X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n = \bigcap_{i=1}^{n} X_i.$$

Если множества A и B не пересекаются, то $A \cap B = \varnothing$.

Часто знак пересечения опускается, т.е. вместо $A \cap B$ можно писать AB.

В качестве примера пересечения множеств можно рассмотреть пересечение множества четных чисел с множеством чисел, кратных 3, которым является множество чисел, кратных 6.

Замечание. Здесь и в дальнейшем все операции над множествами иллюстрируются диаграммами Эйлера-Венна (рис.1-4).

Объединение (сумма) множеств. Объединением двух множеств A и B называется множество $C = A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (рис. 3). Аналогично определяется объединение множеств X_1, ..., X_n ,которое обозначается

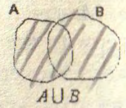


Рис.3

$$X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n = \bigcup_{i=1}^{n} X_i.$$

Если некоторые из элементов множества X входят в несколько X_i то в сумму они все равно входят один раз. Поэтому для конечных пересекающихся множеств число элементов суммы множеств может оказаться меньше, чем сумма чисел элементов слагаемых множеств. Например, множество корней уравнения $(X^2\text{-}4)(X\text{-}2)=0$ складывается из объединения двух множеств $A = \{2,-2\}$ и $B = \{2\}$ и состоит из двух элементов, т.е. $A \cup B = \{-2,2\} = A$.

Вычитание множеств. Разностью множеств A и B называется множество $C = A \backslash B$, состоящее из элементов, принадлежащих A и не принадлежащих B (рис. 4). Очевидно, что вычитание состоит из удаления из множества A элементов, принадлежащих множеству B, т.е. удаления общей части A и B: $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$. Если $B \subset A$, то $A \backslash B = \overline{B_A}$.

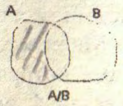


Рис. 4

Свойства операций над множествами

- Коммутативность объединения и пересечения
  $A \cup B = B \cup A,$
  $A \cap B = B \cap A,$ или $AB = BA$.
- Ассоциативность объединения и пересечения
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$ или $A(BC) = (AB)C$.
- Дистрибутивность объединения относительно пересечения и пересечения относительно объединения
  $A(B \cup C) = AB \cup AC,$
  $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C).$
- Идемпотентность
  $A \cup A = A,$
  $A \cap A = A.$
- Теорема де Моргана
  $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B},$
  $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}.$
- Инволюция
  $\overline{\overline{A}} = A.$
- Свойство нуля
  $A\varnothing = \varnothing,\ A \cup \varnothing = A.$
- Свойство единицы
  $AU = A,\ A \cup U = U.$

3. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ

Пусть даны два множества X и Y. Тогда множество упорядоченных пар (x, y), таких что $x \in X$, $y \in Y$, называется ***декартовым произведением*** множеств X и Y и обозначается $X \otimes Y$, т.е. $X \otimes Y = \{(x,y) / x \in X, y \in Y\}$.

Упорядоченность пары понимается в том смысле, что

$$(x,y) \neq (y,x).$$

Всякое подмножество R множества $X \otimes Y$ называется ***бинарным отношением***. В этом случае говорят, что между множествами X и Y установлено бинарное отношение. Если пара (x, y) принадлежит отношению R, т.е. $(x, y) \in R$, это обозначается также $x\ R\ y$. Бинарное отношение R можно задать перечислением пар элементов, которые ему принадлежат.

Пример 1

Пусть $X = \{1, 2, 3\}$; $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Тогда $X \otimes Y = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,7), (2,1), \ldots, (2,7), (3,1), \ldots, (3,7)\}$. Зададим R так: $(x,y) \in R$, если x есть делитель y. Тогда $R = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,7), (2,2), (2,4), (2,6), (3,6)\}$.

Бинарное отношение можно задать в виде некоторого условия xRy :

$$x < y,\ x \geq y,\ x \subset y \text{ (для множеств)},\ x \text{ делится на } y.$$

Бинарные отношения можно задавать также в виде таблиц или графически. При табличном представлении отношения $R \subset X \otimes Y$ строится столько вертикалей, сколько элементов в множестве X и столько горизонталей, сколько элементов в множестве $У$. Элементы, удовлетворяющие отношению R, выделяются точками. В частности, табличное представление отношения для *примера 1* имеет вид, представленный на рис.5.

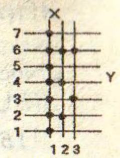


Рис. 5

При графическом задании отношения элементы множеств X и Y обозначаются точками на плоскости, после чего стрелками, направленными от x к y, соединяются те и только те пары точек, которые удовлетворяют (принадлежат) отношению R. В частности, графическое представление отношения R для *примера 1* приведено на рис. 6.Так как $X \subset Y$, то точки 1, 2, 3 можно обозначить один раз, и тогда граф принимает вид, показанный на рис.7

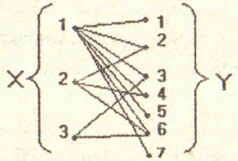


Рис. 6

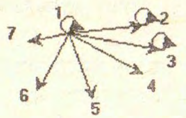


Рис. 7

3.1. Сечение и проекция отношений. Композиция отношений

Пусть $Z = (x, y)$ есть элемент множества $X \otimes Y$. Элемент x в этом случае называется проекцией элемента z на множество X. Если $R \subset X \otimes Y$, то проекцией R на множество X называется множество тех элементов из X, которые являются проекциями элементов множества R на множество X, т.е.

$$\text{Пр}_x R = \bigcup_{z \in R} \text{Пр}_x z .$$

Сечением $R(a)$ по элементу $x = a$ множества $R \subset X \otimes Y$ называется множество элементов $y \in Y$, для которых $(a,y) \in R$.

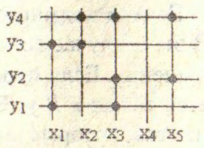


Рис. 8

Пример 2

$R = \{(x_1,y_1), (x_1,y_3), (x_2,y_1), (x_2,y_3), (x_2,y_4), (x_3,y_1), (x_3,y_2), (x_3,y_4), (x_5,y_2), (x_5,y_4)\}$ (рис. 8).

проекцией R на множество X является множество:

$$\text{Пр}_X R = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}.$$

Сечения: $R(x_1) = \{y_1, y_3\}$, $R(x_2) = \{y_1, y_3, y_4\} \ldots$

Так как имеется однозначное соответствие между элементами, по которым производится сечение и самим сечением, то отношение можно полностью определить, задав все его сечения. В частности, для примера 2 сечение можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \{y_1, y_3\} & \{y_1, y_3, y_4\} & \{y_1, y_2, y_4\} & \varnothing & \{y_2, y_4\} \end{bmatrix}.$$

Вместо одного элемента $x \in X$, по которому производится сечение, можно рассматривать целое множество $F \subset X$. Тогда сечение $R(F)$ отношения R по множеству F определится следующим образом: $R(F) = \bigcup_{x \in F} R(x)$.

Можно сказать, что $R(F)$ есть подмножество множества Y, образованное такими элементами $y \in Y$, для которых $(x,y) \in R$, причем $x \in F$. В частности, сечение $R(F)$, где $F = \{x_2, x_3\}$, в примере 2 имеет следующий вид: $R(F) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = Y$.

Пусть даны три множества X, Y, Z и два отношения $R \subset X \otimes Y$ и $S \subset Y \otimes Z$. Композиция отношений S и R есть отношение SR между элементами X и Z, такое что для всех $x \in X$ сечение отношения SR по x совпадает с сечением множества S по подмножеству $R(x) \subset Y$, т.е.

$$SR(x) = S(R(x)). \qquad (*)$$

Пример 3

Пусть R определено как и в примере 2, а S определим следующим образом: $S = \{(y_2, z_1)\}$.

В табличном представлении оба отношения имеют вид, приведенный на рис.9, 10. Тогда отношение SR в соответствии с (*) принимает вид, представленный на рис.11.

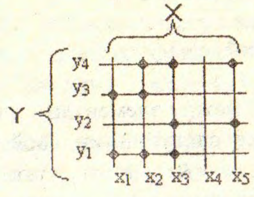


Рис. 9

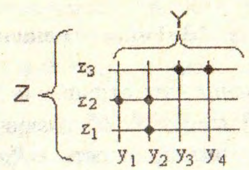


Рис. 10

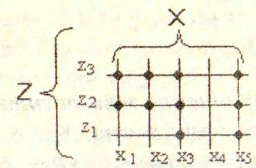


Рис. 11

Композицию SR можно представить также с помощью сечений следующим образом:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \{z_2\} & \{z_1,z_2\} & \{z_3\} & \{z_4\} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \{y_1,y_3\} & \{y_1,y_3,y_4\} & \{y_1,y_2,y_4\} & \varnothing & \{y_2,y_4\} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \{z_2,z_3\} & \{z_2,z_3\} & \{z_1,z_2,z_3\} & \varnothing & \{z_1,z_2,z_3\} \end{bmatrix}.$$

Можно сказать, что SR состоит из трех пар $(x,z) \in X \otimes Z$, для которых существует такое $y\in Y$, что $(x,y)\in R$, а $(y, z)\in S$.

3.2. Свойства отношений

Отношение R на множестве X называется ***рефлексивным***, если для любого $x\in X$ выполняется xRx, т.е. $(x, x)\in R$. Если xRx не выполняется ни для одного $x\in X$, то R – ***антирефлексивно***. Например, рефлексивно отношение = и антирефлексивно ≠.

Отношение R называется ***симметричным***, если для любых $x\in X$ и $y\in Y$ из условия xRy следует yRx, т.е. если $(x,y)\in R$, то $(y,x)\in R$. Отношение R называется ***антисимметричным***, если для любых $x\in X$ и $y\in Y$ из условия xRy следует, что yRx несправедливо, т.е. если $(x,y)\in R$, то $(y,x)\in R$. Например, отношение = симметрично, а отношение > антисимметрично.

Отношение R называется ***транзитивным***, если для любых элементов $x\in X$, $y\in Y$, и $z\in Z$ из условия xRy, yRz следует, что xRz, т.е. если $(x,y)\in R$, $(y,z)\in R$, то $(x,z)\in R$. Примером транзитивного отношения является отношение >, отношение подобия треугольников.

Отношение R называется ***тождественным***, если для любой пары элементов (x, y), где $x\in X$, $y\notin Y$ из условия xRy, yRx следует, что $x = y$, т.е. если $(x,y)\in R$, и $(y,x)\in R$, то $x=y$. Примером тождественного отношения является отношение ≥.

Отношение R обладает ***свойством полноты*** (является полным), если для любой пары (x,y), где $x\in X$, $y\in Y$, выполняется либо xRy, либо yRx, т.е. или $(x,y)\in R$, или $(y,x)\in R$. Примером полного отношения является отношение ≥.

3.3. Типы отношений

Отношение эквивалентности – это отношение R между элементами одного и того же множества X, т.е. $R \subset X \otimes X$, обладающее следующими свойствами: а) рефлексивность (xRx); б) симметричность ($xRy \Rightarrow yRx$); в) транзитивность ($xRy, yRz \Rightarrow xRz$). Типичный пример отношения эквивалентности – это подобие геометрических фигур, равенство векторов и прочее.

Пример 4

Пусть X есть множество целых положительных чисел и дано некоторое целое число m. Определим на множестве X отношение R следующим образом: x_1Rx_2, если $rez\,(\frac{x_1}{m}) = rez\,(\frac{x_2}{m})$, т.е. R есть отношение, выражающееся в том, что числа x_1, x_2 дают одинаковый остаток при делении на m.

Определенное таким образом отношение является рефлексивным, симметричным и транзитивным, а следовательно, является отношением эквивалентности. Очевидно, что $rez\,(\frac{x}{m})$ изменяется в зависимости от значения x при данном m и может принять следующие значения:

$rez\,(\frac{x}{m}) = 0$ для множества $X_0=\{0,\ m,\ 2m,\ 3m,\ldots\}$,

$rez\,(\frac{x}{m}) = 1$ для множества $X_1=\{1, m+1,\ 2m+1,\ 3m+1,\ldots\}$,

$rez\,(\frac{x}{m}) = 2$ для множества $X_2=\{2,\ m+2,\ 2m+2,\ 3m+2,\ldots\}$,

…

$rez\,(\frac{x}{m}) = m-1$ для множества $X_{m-1}=\{m-1,\ 2m-1,\ldots\}$.

Эквивалентными являются числа из одного подмножества, только для них $rez\,(\frac{x_1}{m}) = rez\,(\frac{x_2}{m})$. Эти подмножества называются классами эквивалентности. В данном случае имеется m классов эквивалентности.

Можно утверждать, что отношение эквивалентности всегда разбивает множество X на непересекающиеся между собой классы эквивалентности. В каждый класс объединяются эквивалентные между собой элементы, отвечающие рассматриваемому отношению эквивалентности. Очевидно, что классы эквивалентности не могут между собой пересекаться. Действительно, если предположить противное, т.е. что два класса X_1 и X_2 имеют общий элемент x, то тогда этот элемент эквивалентен всем элементам класса X_1 и класса X_2. Но тогда эквивалентны между собой элементы классов X_1, X_2 и, следовательно, они образуют один класс эквивалентности.

Множество всех классов эквивалентности, объединенной с $\varnothing$ и самим множеством X, называется фактор-множеством X/R множества X по отношению к R. Например, фактор-множество X/R в *примере 4* имеет следующий вид: $X/R = \{\varnothing,\ X_0,\ X_1,\ldots,\ X_{m-1},\ X,\}$.

Системой представителей некоторого отношения эквивалентности называется подмножество, содержащее по одному и только одному элементу из каждого класса эквивалентности. В частности, для *примера 4* можно построить, например, такую систем различных представителей: $D = \{0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m-1\}$.

Отношение порядка

Отношением порядка на множестве X называется отношение $R \subset X \otimes Y$, обладающее следующими свойствами: а) рефлексивность (xRx); б) транзитивность ($xRy, yRz \Rightarrow xRz$); в) тождественность ($xRy, yRx \Rightarrow x=y$).

Примером отношения порядка является включение множеств $A \subset B$. Действительно, а) $A \subset A$ (рефлексивность), б) если $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность), в) если $A \subset B$, $B \subset A$, то $A = B$ (тождественность).

Отношением строгого порядка на множестве X называется отношение порядка, обладающее свойствами: а) транзитивность; б) антисимметричность (если $(x,y) \in R$, то $(y,x) \notin R$). Примером является отношение $>$.

Отношением полного порядка на множестве X называется отношение порядка, обладающее еще и свойством полноты. Примером является отношение $\geq$, определенное на множестве действительных чисел. Оно удовлетворяет следующим условиям: а) $x \geq x$ (рефлексивность), б) $x \geq y$, $y \geq z \Rightarrow x \geq z$ (транзитивность), в) $x \geq y$, $y \geq x \Rightarrow x = y$ (тождественность), в) для любых x, y выполняется либо $x \geq y$, либо $y \geq x$ (полнота).

Отношение R называется ***нулевым*** на множестве X, если оно не выполняется ни для одной пары элементов, т.е. $\forall x_1, x_2 \in X$ $(x_1, x_2) \notin R$. В этом случае, очевидно, $R = \varnothing$. В частности, на множестве комплексных чисел нулевым является отношение $>$.

Отношение R называется ***универсальным*** на множестве X, если оно выполняется для любой пары элементов, т.е. . $\forall x_1, x_2 \in X$ $(x_1, x_2) \in R$.В этом случае $R = X \otimes X$. В частности, на множестве четных чисел универсальным является отношение R, заключающееся в свойстве деления на 2.

Дополнительным к отношению R называется отношение $\overline{R}$, для которого $(x,y) \in \overline{R}$ тогда и только тогда, когда $(x,y) \notin R$. Например, для отношения $\geq$ дополнительным является отношение $<$. Очевидно, что $R \cup \overline{R} = X \otimes Y$.

Обратным для отношения R называется отношение R^{-1}, для которого $(x,y) \in R^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(y, x) \in R$. Например, для отношения $\geq$ обратным является отношение $\leq$, а для отношения $=$ обратным является само это отношение, т.е. $R = R^{-1}$. Если отношение $R \subset X \otimes Y$ задано в виде таблицы, то для получения обратного отношения $R^{-1} \subset Y \otimes X$ нужно отобразить таблицу отношения R относительно главной диагонали. В обратном отношении координаты каждой пары меняются местами, но смысл исходного отношения остается, т.е. если для R $x \geq y$, то для R^{-1} $y \leq x$.

Пример 5

Пусть дано отношение R, как *в примере 2* (рис.12).
Тогда отношение R^{-1} принимает вид, представленный на рис.13.

Если же отношение R задано графически, то при переходе к R^{-1} следует изменить только направление стрелок. В частности, в этом случае для *примера 2* имеем R и R^{-1}, приведенные на рис.14.

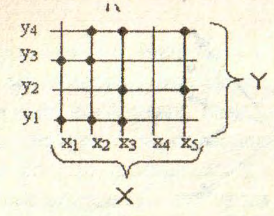


Рис. 12

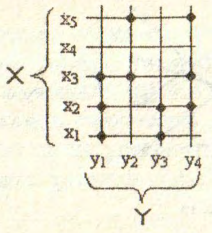


Рис.13

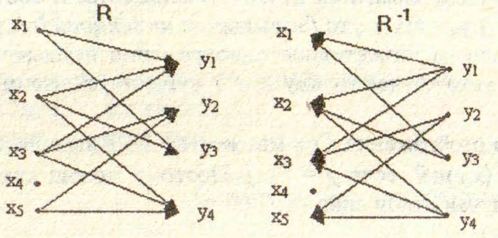


Рис. 14

3.4. Отображение множеств

В математическом анализе существует следующее ***определение функции***: если X – множество на числовой прямой и каждому $x \in X$ можно поставить в соответствие определенное число $y \in Y$, где Y также числовое множество, то на множестве X определена функция $y = f(x)$. Для этой функции X является областью определений, а Y – областью значений.

Если же не ограничиваться числовыми множествами, а рассматривать множества произвольной природы, то можно определить более общее понятие функции. Пусть X и Y два произвольных множества. Говорят, что на X определена функция f, принимающая значения из множества Y, если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент из множества Y. Для множеств произвольной природы (нечисловых) вместо термина «функция» часто используется термин ***«отображение»***. При этом множество X отображается через посредство отображения f на множество Y. Это обозначается следующим образом: f: $X \to Y$. При этом $x \in X$ называется аргументом, а $y \in Y$ - образом аргумента x при отображении f. Совокупность всех тех элементов x из X, образом которых является $y \in Y$, называется прообразом элемента $y \in Y$ и обозначается $f^{-1}(Y)$.

Виды отображений

1. Если каждый элемент из Y является образом по крайней мере одного элемента из X, то отображение f: $X \to Y$ (X на $У$) называется ***сюръекцией*** (гомоморфизмом) (см.рис.15).

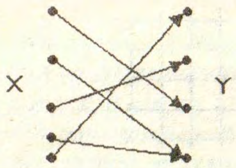


Рис. 15

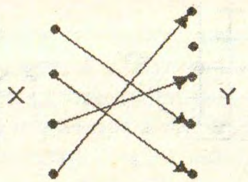


Рис. 16

2. Если любым двум различным элементам x_1 и x_2 из множества X соответствуют различные образы $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, то f называется ***инъекцией*** (см.рис.16).

3. Отображение суръективное и инъективное одновременно называется ***биекцией*** или изоморфизмом. В этом случае между X и Y существует взаимно однозначное соответствие.

Очевидно, что с помощью отображения f на множестве $X\otimes Y$ выделяется некоторое отношение R, причем $(x,y)\in R$, если $y = f(x)$. Поэтому можно сказать, что отображение есть частный случай отношения.

4. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Очень часто возникает проблема сравнения различных множеств по величине. Для конечных множеств этот вопрос решается просто. Всегда можно по числу элементов определить, какое из конечных множеств больше. Для сравнения бесконечных множеств этот подход неприменим. Для бесконечных множеств вводится аналог числа элементов – ***мощность множества.*** Два множества являются ***равномощными*** (имеют одинаковую мощность), если между элементами этих множеств можно установить биективное (взаимно однозначное) соответствие.

Например, множество четных чисел равномощно с множеством положительных целых чисел:

1 2 3 4 ... n ...
2 4 6 8 ... n ...

Аналогично можно установить равномощность множества положительных целых чисел с множеством квадратов, кубов и т.д.:

$n \Leftrightarrow n^2$; $n \Leftrightarrow n^3$.

При этом, очевидно, множество равномощно со своей частью.

4.1. Счетные множества и их свойства

Нами была показана равномощность множества целых положительных чисел и множества четных чисел, равномощность множества целых положительных чисел и множества кубов, квадратов и т.д. Вообще между множеством натуральных чисел и любой его бесконечной частью можно установить взаимно однозначное соответствие. Множество натуральных чисел называется ***счетным.*** Счетны также и все множества, равномощные с ним. При установлении взаимно однозначного соответствия между произвольным множеством и множеством натуральных чисел

каждому элементу произвольного множества присваивается натуральный номер, т.е. числа множества нумеруются. Можно сказать, что множество является ***счетным***, если оно, во-первых, бесконечно, во-вторых, все его элементы можно перенумеровать натуральными числами. Доказать ***счетность множества*** – это значит найти способ нумерации его элементов натуральными числами. Мощность счетного множества обозначается символом χ_0 (алеф-нуль).

Пример 6

Множество всех целых чисел счетно.

0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, ...
1 2 3 4 5 6 7, ...

Здесь установлено соответствие следующего вида:

$n\Leftrightarrow 2n+1$, если $n \geq 0$,
$n\Leftrightarrow 2|n|$, если $n < 0$.

Свойства счетных множеств

1. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.
2. Объединение конечного или счетного числа счетных множеств счетно.
3. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.
4. Декартово произведение двух счетных множеств счетно.

4.2. Несчетные множества и их свойства

Несчетные множества – это бесконечные множества, мощность которых превосходит χ_0. Если для доказательства счетности множества нужно найти способ нумерации его элементов, то для доказательства несчетности множества нужно показать, что такого способа нет.

Покажем, например, что множество всех действительных чисел в интервале (0,1) (множество точек отрезка (0,1)) несчетно.

Для доказательства предположим противное, т.е. что нам удалось перенумеровать все действительные числа. Это предположение окажется неверным, если будет найдено хотя бы одно неперенумерованное число. Построим такое число. Так как число должно принадлежать интервалу (0,1) , то оно имеет нулевую целую часть. Все перенумерованные числа интервала (0,1) выпишем:

1) 0, a_1, a_2, a_3,...; 2) 0, b_1, b_2, b_3, ... ; 3) 0, c_1, c_2, c_3, ...

В качестве первого десятичного знака искомого числа возьмем любую цифру, отличную от a_1 первого десятичного знака первого числа. В качестве второго десятичного знака возьмем цифру, отличную от b_2, в качестве третьего – цифру, отличную от c_3 и т.д.

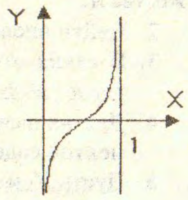


Рис. 17

В результате будет получено число из интервала (0,1), которое отличается от каждого из перенумерованных чисел хотя бы в одном разряде и при этом не имеет номера. Следовательно, множество действительных чисел в интервале (0,1) несчетно.

Так как между множеством всех действительных чисел и множеством действительных чисел из (0,1) можно установить взаимно однозначное соответствие (см.рис.17), то эти множества равномощны. Мощность таких множеств называется континуумом и обозначается C или χ, а сами множества континуумами. Очевидно, что у континуума тоже мощность части может быть равна мощности самого множества.

Свойства несчетных множеств

1. Объединение континуума с конечным, счетным множеством или континуумом есть континуум.
2. Объединение континуума континуумов есть континуум.
3. Декартово произведение континуумов есть континуум.
4. Декартово произведение счетного множества и континуума есть континуум.

Таким образом, по степени возрастания мощности множества располагаются в следующем порядке: конечные, счетные, континуум. Кроме того, существуют множества мощности большей, чем континуум. Можно показать, в частности, что мощность, большую, чем континуум, имеет множество функций, определенных на континууме и принимающих значение только 0 и 1.

Тогда возникает вопрос, а существуют ли множества с наибольшей мощностью. Показано, что, каково бы ни было множество A, множество всех его подмножеств $P(A)$ имеет мощность, большую, чем мощность множества A. Так, например, если A счетно, то $P(A)$ - континуум. Отсюда следует, что множеств максимальной мощности не существует.

5. УПРАЖНЕНИЯ

1. Задано $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Найти $P(A)$ - множество всех подмножеств множества A.
2. Найти числовое множество A, такое что $\{x \in A \mid x>0\} = \{x \in A \mid x<0\}$.
3. В каких отношениях находятся между собой множества $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in R \mid x^2-3x+2=0\}$, $C = \{x \in Z \mid x \leq 3\}$?
4. Для написания почтового индекса используется шесть ячеек. Сколько элементов содержит множество возможных почтовых отделений?
5. Пусть X_1 и X_2 – множество студентов двух групп, а M – множество юношей, обучающихся в этих группах. Запишите с помощью включения следующие условия:

а) все юноши обучаются в первой группе;

б) в первой группе нет юношей;
в) вторая группа состоит из юношей;
г) все юноши обучаются в одной группе;
д) на курсе обучаются только юноши;
е) на курсе обучаются только девушки.

6. Доказать, если $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset B$.
7. Доказать, что из условия $A \subset B$ следует: а) $A \bigcap B = A$; б) $A \bigcup B = B$.
8. Изобразить пересечение, объединение и разность следующих множеств на числовой прямой:

а) $X = \{x / |x|<1\}$, $Y = \{x / x \geq 0\}$;
б) $X = \{x / x<0\}$, $Y = \{x / x^2 \leq 1\}$;
в) $X = \{x / \sin(x) \geq 0\}$, $Y = \{x / x^2-1 \leq 0\}$.
Рассмотрит случаи: 1) $X,Y \subset R$, 2) $X,Y \subset Z$.

9. Найти дополнение множества A до множества X.

а) $X = \{3,8,7,4,2,1\}$, $A = \{2,7\}$;
б) $X = \{3x+1 \setminus x \in N\}$, $A = \{3x+4 \setminus x \in N\}$;
г) $X = \{x^2+x+1 \setminus x \in N\}$, $A = \{x^2+ 5x + 7 \setminus x \in N\}$.

10. Пусть A, B, C – подмножества множества X. Доказать, что

а) $X \setminus (X \setminus A) = A$;
б) $X \setminus B \subset X \setminus A$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$;
в) $A \setminus B = A \cap B\ (X \setminus B)$;
г) $A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B))$.

11. Показать, что для любых множеств A, B, C верны следующие соотношения:

а) $\varnothing \subset A \cap B \subset A \cup B$;
б) $C \subset A \cap B$, тогда и только тогда, когда $C \subset A$ и $C \subset B$;
в) $A \cup B \subset C$ т. и т. т., когда $A \subset C$ и $B \subset C$;
г) если $A \cup B = \varnothing$, то $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$;
д) $A \cup B = A \cap B$ т. и т. т., когда $A = B$;
е) если $A \cup B = C$, $B \cup C = A$, $C \cup A = B$, то $A = B = C$;
ж) если $A \cap B = C$, $B \cap C = A$, $C \cap A = B$, то $A = B = C$.

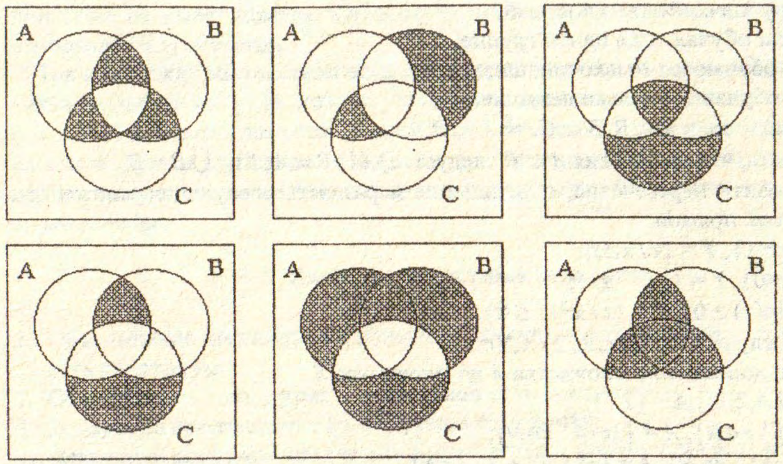
12. Пусть универсальное множество U состоит из 100 элементов, его подмножество A и B соответственно из 64 и 42 элементов. Определить минимально возможное число элементов следующих множеств:

а) $A \cup B$, б) $A \cap B$, в) $A \cup B$, г) $A \setminus B$, д) $\bar{A} \setminus B$, е) $\bar{A} \setminus (A \cup B)$.

13. Доказать, что

а) $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A \cup B = B$;
б) $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A \cap B = A$;
в) $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A \setminus B = \varnothing$.

14. Запишите с помощью операций над множествами выражения для множеств, соответствующих заштрихованным областям:



15. Пусть A и B – данные множества. Решить уравнения:
а) $A \setminus X = B$; б) $A \cup X = B$; в) $A \cap X = B$.

16. Пусть $B \subset A \subset D$. Показать, что множество $B \cup (D \setminus A)$ является решением системы $\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = D. \end{cases}$

17. Пусть $B \subset A$, $A \cap D = \varnothing$. Будет ли множество $D \cup (A \setminus B)$ решением системы $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \setminus X = D? \end{cases}$

18. Решить систему уравнений графически:
а) $\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$.б) $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C. \end{cases}$

19. Показать, что если $A \subset B$, то $\overline{B} \subset \overline{A}$.

20. Построить на плоскости множества X, Y, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$, если:
а) $X = \{(x, y) / xy \geq 1\}$, $Y = \{(x,y) / x\text{-}y\text{-}1 \leq 0\}$;
б) $X = \{(x,y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$, $Y = \{(x,y) / x \geq 0\}$;

21. Найти $A \otimes B$, если
а) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$;
б) $A = \{a1, a2, a3\}$, $B = \{b1, b2, b3, b4\}$;
в) $A = \{0, \Delta, \square\}$, $B = \{a, b, \Delta\}$;
г) $A = \{x \in N / x \leq 10, x$ - простое$\}$, $B = \{5x / x \leq 3, x \in N\}$.

22. Найти $A \otimes A$, если а) $A = [0,1]$; б) $A = \{0, 1, 2\}$; в) $A = \{x \in N / 5 < x < 10\}$.

23. Проверить, что $A \otimes B \neq B \otimes A$ для множеств $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$.
в) $X=\{(x,y) / y \geq x^2+1\}$, $Y=\{(x,y) / x^2+y^2 \leq 4\}$.

24. Доказать, что, если A, B, C, D не пусты, то
а) $A \subset B$, $C \subset D$ тогда и только тогда, когда $A \otimes C = B \otimes D$,
б) $A = B$, $C = D$ тогда и только тогда, когда $A \otimes C = B \otimes D$.

25. Доказать:
а) $(A \cup B) \otimes C = (A \cup C) \otimes (B \cup C)$,
б) $A \otimes (B \cup C) = (A \cup B) \otimes (A \cup C)$,
в) $(A \cap B) \otimes (C \cap D) = (A \otimes C) \cap (B \otimes D)$,
г) $(A \cup B) \otimes (C \cup D) = (A \otimes C) \cup (B \otimes C) \cup (A \otimes D) \cup (B \otimes C)$.

26. Доказать, что $(A \otimes B) \cup (C \otimes D) \subset (A \cup C) \otimes (B \cup D)$. При каких A, B, C, D получается равенство.

27. Найти R^{-1}, RR, RR^{-1}, $R^{-1}R$ для отношений:
а) $R = \{(x,y) / x$ делит $y;\ x, y \in N\}$,
б) $R = \{(x,y) / 2x \geq 3y;\ x, y \in N\}$,
в) $R = \{(x,y) / 2 \geq y\text{-}x \geq 0;\ x, y \in N\}$.

28. Построить бинарное отношение:
а) рефлексивное, симметричное, нетранзитивное,
б) рефлексивное, антисимметричное, нетранзитивное.

29. Какими свойствами обладают следующие отношения:
а) отношение перпендикулярности прямых,
б) отношение чисел x и y, где $x^2 + y^2 = 25$.

30. Определить тип отношения: а) логическое следование; б) отношение быть делителем на множестве целых положительных чисел; в) параллельность прямых.

31. Показать, что в определении отношения эквивалентности свойство рефлексивности можно заменить свойством полноты.

32. Определить тип отношения:
а) $R=\{(x, y) / (x - y)$ есть рациональное число; x, y – действительные числа$\}$,
б) $R=\{(x, y) / \frac{x-y}{m}$ есть целое; x, y, m – целые числа $m \neq 0\}$.

33. Показать, что если транзитивны отношения R и S, то транзитивны также и отношения $R \cup S, R \cap S, R^{-1}, S^{-1}$.

34. Показать, что из рефлексивности отношений R и S следует рефлексивность отношений $R \cup S, R \cap S$.

35. Показать, что если R и S антирефлексивны, то антирефлексивны также и отношения $R \cup S, R \cap S, R^{-1}, S^{-1}$.

36. Показать, что полное, симметричное и транзитивное отношение всегда рефлексивно.

37. Доказать, что: а) если A бесконечно, а B – конечно или счетно, то A и равномощны; б) если A – континуум, а B конечно или счетно, то $A \setminus B$ и A равномощны.

38. Найти мощность следующих множеств:
а) всех окружностей на плоскости,
б) многочленов с рациональными коэффициентами,

в) точек на окружности,
г) корней всех многочленов с рациональными коэффициентами,
д) всех сегментов на числовой оси,
е) точек на периметре квадрата и внутри него,
ж) точек круга,
з) треугольников на плоскости,
и) всех концентрических кругов на плоскости.

39. Доказать, что
а) множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно,
б) если все A_i конечны, не пусты и попарно не пересекаются, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ счетно.

40. Определить, в каком отношении находятся мощности множеств C и $C \setminus B$, если $A \subset C$ и существует взаимно однозначное соответствие между A и $A \setminus B$.

Литература

1. Р. Фор, А. Кофман. Современная математика. М.: Мир, 1966.
2. А.Н. Колмогоров. Элементы теории множеств и функционального анализа. М.: Наука, 1972.