ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра информатики и систем управления

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Задания к практическим занятиям и самостоятельной работе
для студентов специальности 230102 дневной и очно-заочной формы обучения

Нижний Новгород 2006

Составители: М.Е. Бушуева, О.П. Тимофеева

УДК 621.37 (075.8)

Методы оптимизации: задания к практическим занятиям и самостоятельной работе для студентов специальности 230102 дневной и очно-заочной формы обучения/НГТУ; сост.: М.Е. Бушуева и др. Н. Новгород, 2006. 16 с.

Приводятся задачи по дисциплине "Методы оптимизации": линейного программирования (в том числе транспортные), дискретного программирования, динамического программирования, теории игр. Задачи снабжены ответами и используются в ходе практических занятий. Их решение позволяет усвоить соответствующие методы и приобрести необходимые практические навыки.

Научный редактор Ю.С. Бажанов
Редактор Э.Б. Абросимова

Подп. к печ. 16.10.06. Формат 60x84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная.
Печ.л. 1. Уч.–изд.л. 1. Тираж 300 экз. Заказ.

Нижегородский государственный технический университет.
Типография НГТУ.603600, Н. Новгород, ул. К.Минина, 24.

1. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Постановка задач линейного программирования

Для условных экономических ситуаций, описанных в данном разделе, необходимо составить математические модели линейного программирования в общей форме.

1. Крупнейшая свиноферма имеет возможность покупать от одного до трех различных видов зерна и готовить из него различные виды комбикормов (смесей). Зерновые культуры содержат различное количество питательных компонентов (ингредиентов). При этом в расчет принимаются ингредиенты A, B, C, D. Затраты на единицу веса зерна равны 41, 35 и 96 рублям для зерна первого, второго и третьего типов соответственно. В единице веса каждого из типов зерна содержится: ингредиента A – 2, 3 и 7 единиц; ингредиента B – 1, 1 и 0 единиц; ингредиента C – 5, 3 и 0 единиц; ингредиента D – 0.6, 0.25 и 1 единица. На плановый период для прокорма имеющегося поголовья свиней требуется, чтобы общее количество корма было не меньше 2800 единиц веса и в нем содержалось по весу не менее 1250, 250, 900 и 265 единиц веса ингредиентов A, B, C, D соответственно. Определить состав комбикорма, при котором его стоимость будет минимальна.

2. Для изготовления деталей двух видов требуется проделать ряд операций на трех машинах. Время обработки одной детали первого типа на первой машине 11 мин, на второй – 7 мин, на третьей – 6 мин; время обработки одной детали второго типа соответственно 9, 12 и 16 мин на каждой из машин. В течение месяца первая машина работает 9850 мин, вторая – 8150 мин, третья – 9600 мин. Одна деталь первого типа приносит доход 900у.е., второго – 1000у.е. Сколько нужно ежемесячно производить деталей каждого типа, чтобы иметь максимальную общую прибыль?

3. В цехе два токарных станка и один автомат. Требуется организовать производство деталей в комплектах. Один комплект состоит из одной детали первого типа, трех деталей – второго и двух деталей третьего типа. Дневная производительность токарного станка: 50 деталей первого типа или 40 деталей второго или 80 – третьего. Для автомата эти производительности равны соответственно 120, 90 и 60. Составить программу работы оборудования в цехе, при которой будет производиться максимальное количество комплектов.

4. Завод выпускает радиоприемники трех различных моделей A, B и C. Каждое изделие приносит доход в размере 8, 15 и 25 у.е. соответственно. Необходимо, чтобы завод выпускал за неделю не менее 100 приемников модели A, 150 приемников модели B и 75 приемников модели C. Каждая модель характеризуется определенным временем, необходимым для изготовления соответствующих деталей, сборки изделия и его упаковки. В расчете на 10 приемников моделей A требуется 3 часа на изготовление соответствующих деталей, 4 часа на сборку и 1 час на упаковку. Соответствующие показатели в расчете на 10 приемников модели B равняются 3.5, 5 и 1.5 часам; а на 10

приемников модели C - 5, 8 и 3 часам. В течение недели завод может потратить на производство радиодеталей 150 часов, на сборку 200 часов и на упаковку 60 часов. Решить задачу оптимального производственного планирования.

5. На заготовительный участок поступило 69 труб для отопительной сети, каждая длиной 1070см. Их необходимо разрезать на трубы по 130, 150 и 310см в комплектности, задаваемой отношением 1:4:2. Найти такой вариант раскроя поступивших труб, при котором количество получаемых комплектов максимально.

6. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 400 тыс. у.е. Его предполагается разместить на площади 45 м^2. Участок можно оснастить оборудованием трех видов – машинами стоимостью 7 тыс. у.е. каждая, размещающимися на площади 9 м^2, производительность которых 9 тыс. ед. продукции за смену; машинами стоимостью 4 тыс. у.е., занимающими площадь 4 м^2, производительность которых 4 тыс. единиц продукции за смену; машинами стоимостью 3 тыс. у.е., занимающими площадь 3 м^2, производительность которых 4 тыс. единиц продукции за смену. Определить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий наибольшую производительность всего участка.

7. Предприятие выпускает обычный, специальный и декоративный сплавы латуни и реализует их соответственно по 2.3, 5 и 6 у.е. за единицу веса. Производственные мощности позволяют производить за плановый период не более 400 единиц веса обычного сплава, 700 единиц специального и 300 единиц декоративного сплавов. Обязательными составляющими сплавов являются медь, цинк, свинец и никель. Их цена соответственно 1.0, 0.8, 0.5 и 0.9 у.е. за каждую единицу веса.

По технологии декоративный сплав должен содержать не менее 9% никеля, 35% меди и не более 35% свинца; специальный – не менее 3% никеля; 70% меди , 10% цинка и не более 25% свинца. В обычный сплав составляющие входят без ограничений. Определить план выпуска сплавов, обеспечивающий максимальную прибыль.

8. Для производства трех видов продукции заводу требуется 3 вида сырья: S_1, S_2, S_3, запасы которого ограничены. На производство единицы продукции первого типа расход сырья S_1 равен 1 ед., S_2 – 2 ед., S_3 – 1 ед. На производство единицы продукции второго типа расход сырья S_1 - 1 ед., S_2 – 2 ед., S_3 – 4 ед. На производство единицы продукции третьего типа расход сырья S_1 – 2 ед., S_2 – 3 ед., S_3 – 3 ед. Запасы сырья ограничены следующим образом: S_1 величиной 1 ед., S_2 – 3 ед., S_3 – 5 ед. Доход от реализации продукции первого типа равен 4, второго – 5, третьего – 2 условным единицам. Определить оптимальную производственную программу.

9. На двух станках производится обработка деталей трех типов. Первый станок может обрабатывать в единицу времени 20 деталей первого типа, 18 деталей второго типа и 15 – третьего типа. Второй станок соответственно 12, 17, 8 деталей. Найти оптимальное распределение задания по обработке трех видов деталей в отношении 2:3:4 за время T = 200 ед.

10. Имеется 69 труб для отопительной сети по 1070 см каждая. Их необходимо разрезать на трубы по 130, 150 и 310 см. Найти такой вариант раскроя поступивших труб, при котором отходы были бы минимальны.

11. Решить задачу о загрузке самолета предметами трех типов, если максимальная грузоподъемность самолета 94 т, а объем самолета составляет 122 м^3. Вес, объем и ценность единицы груза каждого типа приведены в таблице:

Предмет, i	Вес предмета, P_i	Объем предмета, V_i	Ценность предмета, C_i
1	7	8	15
2	3	6	10
3	8	5	8

Определить набор предметов максимальной ценности.

12. Необходимо изготовить на двух станках 2000 деталей. Так как второй станок производит более качественную продукцию, заказчик хотел бы иметь возможность использовать его по крайней мере в два раза чаще первого. Производительности станков даны: 1000 и 1500 деталей в сутки соответственно. Затраты на производство одной детали на первом станке 2 у.е., на втором – 5 у.е. Минимизировать суммарные затраты на производство.

13. Формируются поезда двух типов, отличающиеся по количеству вагонов различных типов. Всего имеется четыре типа вагонов: общие, плацкартные, купейные, спальные. Поезда первого типа содержат по 2 спальных вагона, по 4 купейных и по 6 плацкартных; поезда второго типа содержат по 3 купейных, 7 плацкартных и 4 общих вагона. В распоряжении имеется 10 спальных вагонов вместимостью 26 человек, 40 купейных вместимостью 52 человека, 114 плацкартных вместимостью 78 человек и 32 общих вместимостью 140 человек. Определить количество поездов обоих типов, перевозящих максимальное число пассажиров.

14. Требуется определить, какое количество чистой стали и металлолома следует использовать для приготовления сплава при следующих данных. Производственные затраты в расчете на одну тонну чистой стали равны 3 у.е., а затраты на одну тонну металлолома – 5 у.е. Заказ предусматривает поставку не менее 5 тонн сплава. Ограничения на запасы стали– 4 тонны, на запасы металлолома – 6 тонн. Отношение веса металлолома к весу чистой стали при приготовлении сплава не должно превышать 7:8. Условия таковы, что процессы плавки не могут длиться дольше 18 часов; при этом на 1 тонну стали уходит 3 часа, а на одну тонну металлолома – 2 часа производственного времени.

15. Цех производит два вида изделий. В процессе производства каждое изделие проходит три технологические операции. Расход времени на производство 100 штук изделий, резерв времени по каждой операции, затраты на производство 100 штук изделий каждого вида, прибыль от реализации 100 штук готовых изделий даны в таблице:

Данные	Изделие 1-го вида	Изделие 2-го вида	Резерв времени на техн. операцию
Операция №1	2	3	100
Операция №2	3	5	120
Операция №3	1	1	60
Затраты (на 100 шт.)	20	22	
Прибыль (на 100 шт.)	30	40	

Составить производственную программу, обеспечивающую максимальную прибыль.

1.2. Графическое решение задач линейного программирования

Решить графическим способом следующие задачи линейного программирования.

16. $L = 2x_1 + 3x_2 \to \max$
$2x_1 - 3x_2 \geq 12$
$x_1 + x_2 \geq 2$
$3x_1 + 6x_2 \leq 24$
$x_1, x_2 \geq 0$
($L_{\max} = 16$)

17. $L = x_1 + 2x_2 \to \max$
$-x_1 + x_2 \geq -1$
$x_1 - 2x_2 \leq 1$
$x_1, x_2 \geq 0$
($L_{\max} = \infty$)

18. $L = x_1 - x_2 \to \max$
$1 \leq x_1 + x_2 \leq 2$
$1 \leq x_1 - 2x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$
($L_{\max} = 2$)

19. $L = x_1 - x_2 - x_3 \to \max$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$
$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$
($L_{\max} = 2$)

20. $L = -x_2 - 3x_3 \to \max$
$-x_2 - 6x_3 + x_4 = -5$
$x_1 + 5x_2 - 19x_3 = -13$
$3x_2 - 6x_3 + x_5 = -2$
$x_i \geq 0$ ($i = \overline{1,5}$)
($L_{\max} = -\frac{5}{2}$)

21. $L = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \min$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$x_i \geq 0$ ($i = \overline{1,4}$)
($L_{\min} = -1$)

22. $L = -x_1 - x_2 + x_5 \to \min$
$x_1 + x_2 = 1$
$x_2 - 2x_3 = -3$
$x_3 - x_4 + x_5 = 1$
$x_i \geq 0$ ($i = \overline{1,5}$)
($L_{\min} = -1$)

23. $L = \sum_{i=1}^{5} x_i \to \max$
$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$
$-2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -6$
$x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = 12$
$x_i \geq 0$ ($i = \overline{1,5}$)
($L_{\max} = 34$)

24. $L = x_1 + x_2 \to \max$
$x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 - x_2 \ge 2$
$x_1, x_2 \ge 0$
($L_{\max} = 1$)

25. $L = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max$
$x_1 - 5x_2 + x_3 = 5$
$-x_1 + x_2 + x_4 = 4$
$x_1 + x_2 + x_5 = 8$
$x_i \ge 0$ ($i = \overline{1,5}$)
($L_{\max} = 22$)

26. $L = \sum_{i=1}^{6} x_i \to \max$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 1$
$x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 1$
$x_2 - x_6 = 2$
$x_i \ge 0$ ($i = \overline{1,5}$)
($L_{\max} = \infty$)

27. $L = -2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$x_1 - 2x_2 - x_4 = 4$
$-x_1 + 2x_2 - x_5 = 6$
$x_i \ge 0$ ($i = \overline{1,5}$)
($D = \varnothing$)

28. $L = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 1$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 4$
$x_i \ge 0$ ($i = \overline{1,3}$)
($L_{\min} = -1$)

29. $L = 3x_1+2x_2+x_3+x_4+5x_5 \to \max$
$3x_1 + x_3 - x_5 = 3$
$x_1 + x_2 - 3x_4 = -12$
$x_2 + x_3 + x_5 = 4$
$x_i \ge 0$ ($i = \overline{1,5}$)
($L_{\max} = \frac{286}{9}$)

1.3. Построение канонической формы и двойственных задач линейного программирования

Построить каноническую форму или двойственную задачу для следующих задач линейного программирования:

30. $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$
$2x_1 - x_2 + x_3 \ge 3$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 5$
$2x_1 - x_3 + x_4 \ge 6$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

31. $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \max$
$3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 6$
$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ge 2$

32. $x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \min$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$-x_1 - x_4 \le 5$
$x_2 + x_3 \ge 10$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

33. $x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 \to \min$
$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 10$
$2x_1 - x_2 \le 7$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 \ge 5$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$
$x_i \ge 0$ ($i = \overline{1,4}$)

34. $x_1 - x_2 - 7x_3 + 5x_4 \to \max$
$x_1 - x_2 - 6x_3 + 4x_4 \le 1$
$x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 \ge 9$
$x_i \ge 0\ (i = \overline{1,4})$

35. $x_1 + 2x_3 - x_4 + 3x_6 \to \min$
$x_1 - 2x_2 + x_5 - x_6 \ge 6$
$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \ge 1$
$3x_1 - x_4 + x_5 - 3x_6 \le 4$
$2x_1 - x_3 + x_5 + 4x_6 = 7$
$x_i \ge 0\ (i = \overline{1,6})$

36. $x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$
$2x_1 + x_2 + x_3 \le 1$
$x_2 - x_3 \ge 0$
$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

37. $3x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 \to \min$
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_5 \ge 4$
$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 1$
$3x_1 - 7x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 \le 6$
$4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 9$
$x_i \ge 0\ (i = \overline{1,5})$

38. $x_1 + x_2 \to \min$
$0 \le x_1 + x_2 \le 3$
$-1 \le x_1 - x_2 \le 0$
$0 \le x_1 \le 1,$
$0 \le x_2 \le 2$

39. $x_1 - x_2 \to \max$
$1 \le x_1 + x_2 \le 2$
$2 \le x_1 - 2x_2 \le 3$
$1 \le 2x_1 - x_2 \le 2$
$x_1,\ x_2 \ge 0$

40. $2x_2 + 5x_4 \to \min$
$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 2$
$5x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 7$
$7x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 5$
$6x_1 + 7x_2 + 9x_3 + x_4 \le 8$
$x_i \ge 0\ (i = \overline{1,4})$

41. $4x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \ge 4$
$x_1 - x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 \ge 5$
$x_i \ge 0\ (i = \overline{1,5})$

1.4. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Решить симплекс-методом следующие задачи линейного программирования:

42. $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \min$
$x_1 + x_4 - 6x_6 = 9$
$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2$
$x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6$
$x_i \ge 0\ (i = \overline{1,6})$
($f_{\min} = -5$)

43. $6x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max$
$4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8$
$2x_1 - x_2 + x_4 = 2$
$x_1 + x_2 + x_5 = 2$
$x_i \ge 0\ (i = \overline{1,5})$
($f_{\max} = 6$)

44. $4x_1+5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \to \max$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15$

$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120$

$3x_1+ 5x_2+ 10x_3+ 15x_4 \le 100$

$x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,4}$)

($f_{\max} = \frac{695}{7}$)

45. $6x_1+ x_2+ x_3+3x_4 \to \min$

$x_1 + x_2 \le 300$

$x_3 + x_4 \le 300$

$5x_1 + x_3 = 100$

$x_2 + 2x_4 = 200$

$x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,4}$)

($f_{\min} = 300$)

46.$5x_2 + x_3 – x_4 + x_5 \to \max$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1 – 2x_2 + x_4 = 2$

$-2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10$

$x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,5}$)

($f_{\max} = \infty$)

47. $4x_1- x_2+x_3+2x_4 – x_5 \to \max$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$4x_1+3x_2+2x_3 + x_4 + x_5 = 13$

$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 16$

$x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,5}$)

($D = \varnothing$)

48. $3x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max$

$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 5$

$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 7$

$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$

$x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,4}$)

($f_{\max} = \frac{4}{3}$)

49. $2x_3 + 2x_4 – x_5 \to \max$

$-2x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$4x_1+3x_2+2x_3+x_4 + x_5 = 13$

$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 16$

$x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,5}$)

($f_{\max} = \infty$)

1.5. Двойственная задача линейного программирования

Решить задачу линейного программирования путем перехода к двойственной.

50. $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \min$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 1$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 1$

$3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1$

$6x_1 + 6x_2 + 6x_3 \ge 1$

$2x_1 + 4x_3 \ge 1$

$x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,3}$)

($f_{\min} = 2$)

51. $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \min$

$x_2 + x_3 + x_4 \ge 2$

$x_1 + x_3 + x_4 \ge 1$

$x_1 + x_2 + x_4 \ge -1$

$x_1 + x_2 + x_3 \ge 2$

$x_2 + 2x_3 + 2x_4 \ge 2$

$-1x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 1$

$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 \ge -1$

$2x_3 + x_4 \le 6$

$x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,4}$)

($f_{\min} = 3$)

52. $x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$

$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1$

$2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_5 = 10$

$x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,5}$)

($f_{\max} = 1$)

53. $3x_1+2x_2 + 3x_3 + 4x_4 – x_5 \to \min$

$x_1 + x_2 - 2x_5 \ge 1$

$x_1 + x_3 \ge 1$

$x_1 + x_4 \ge 1$

$x_j \ge 0$ ($j = \overline{1,5}$)

($f_{\min} = 3$)

1.6. Транспортная задача линейного программирования и задача выбора

Решить, пользуясь методом потенциалов или венгерским методом, транспортные задачи, заданные матрицами:

54.

2	3	4	5	2
1	3	1	2	1
1	4	1	1	3
5	2	2	2	4
5	2	2	1	

($f_{\min} = 16$)

55.

3	4	1	2	4
2	2	4	3	5
1	1	2	1	4
1	1	1	1	5
3	8	4	3	

($f_{\min} = 23$)

56.

7	8	5	3	11
2	4	5	6	11
6	3	1	2	8
5	9	9	7	

($f_{\min} = 89$)

57.

5	7	7	10	3
4	5	8	13	4
13	15	14	21	9
18	20	24	31	18
15	5	7	7	

($f_{\min} = 536$)

58.

7	9	1	9	7
22	25	16	23	4
25	29	21	28	7
12	14	6	15	8
5	5	7	9	

($f_{\min} = 392$)

59.

2	3	6	8	1	3	7
1	7	2	6	5	2	6
3	6	1	2	4	5	2
7	4	2	5	3	1	3
1	4	4	5	1	3	

($f_{\min} = 49$)

60.

1	4	2	5	6
2	1	4	1	3
3	2	1	3	3
4	2	4	2	

($f_{\min} = 15$)

61.

7	8	5	3	11
2	4	5	9	11
6	3	1	2	8
8	9	9	7	

($f_{\min} = 83$)

62.

2	4	1	3	4
4	8	2	4	6
2	2	6	5	8
3	6	5	7	

($f_{\min} = 41$)

63.

4	3	6	9	2	4
6	5	4	2	9	3
1	6	3	7	6	5
2	4	8	3	9	4
4	6	4	7	7	

($f_{\min} = 33$)

64.

6	3	2	7	1	7
5	9	6	4	3	6
1	2	5	2	8	8
7	3	8	2	4	9
4	5	6	3	6	

($f_{\min} = 49$)

65.

2	3	5	7	1	10
1	6	2	6	4	10
3	5	3	2	6	13
7	2	4	5	3	12
6	8	9	5	7	

($f_{\min} = 62$)

Решить следующие задачи выбора:

66.

7	9	3	6	4	12	4
2	4	4	7	8	8	5
4	5	6	5	12	7	3
3	6	8	4	6	6	7
5	10	9	3	8	5	4
6	9	5	10	9	6	7
7	4	3	6	2	5	4

(f_{max} = 64)

67.

8	9	10	11	12	13	3
4	5	6	7	8	9	10
12	4	5	6	7	8	9
13	5	6	8	9	5	4
8	9	10	4	3	2	7
4	12	8	16	12	10	8
7	6	7	4	5	6	12

(f_{max} = 77)

68.

4	5	9	5	6	14	6
8	12	4	13	16	15	16
2	15	8	10	17	7	9
14	8	4	9	5	6	7
3	5	4	12	10	11	13
10	9	11	5	6	12	8
7	13	8	12	8	11	10

(f_{max} = 97)

69.

1	4	5	8	9	4	5
5	6	7	8	10	11	12
4	18	4	7	6	7	8
5	4	3	6	10	4	5
9	10	8	9	5	13	6
6	8	11	12	7	8	9
12	4	5	6	2	5	4

(f_{max} = 84)

2. ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решить следующие задачи целочисленного линейного программирования, используя метод Гомори или метод ветвей и границ (метод Лэнд и Дойг).

70. $x_1 + x_2 \to \max$
$2x_2 – x_1 \le 2$
$2x_1 – x_2 \le 4$
x_1, x_2 – целое
(f_{max} = 5)

71. $x_1 + x_2 \to \max$
$x_1 + x_2 \le 9$
$-4x_1 + 7x_2 \le 4$
$5x_1 - 6x_2 \le 6$
$x_1, x_2 \ge 0$, целое
(f_{max} = 5)

72. $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$
$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$
$2x_1 + x_2 + x_3 – x_4 + 2x_5 = 6$
$2x_1 - 2x_2 + x_5 = 3$
$x_i \ge 0$, целые ($i = \overline{1,5}$)
(f_{max} = 21)

73. $5x_4 + 7x_5 \to \min$
$-x_1 + x_4 + 2x_5 = 7$
$x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 3$
$x_2 – x_4 - 4x_5 = 11$
$x_i \ge 0$, целые ($i = \overline{1,5}$)
(f_{max} = 29)

74. $x_1 - 3x_2 - 3x_3 \to \max$
$2x_1 + x_2 - x_3 \le 4$
$4x_1 - 3x_2 \le 2$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3$
$x_i \ge 0$, целые ($i = \overline{1,3}$)
($f_{\max} = 0$)

75. $7x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \to \max$
$x_1 - x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 12$
$2x_1 + x_2 + x_5 = 4$
$x_i \ge 0$, целые ($i = \overline{1,5}$)
($f_{\max} = 5$)

Решить методом ветвей и границ задачи коммивояжера, заданные следующими матрицами:

76.

∞	31	15	19	8	55
19	∞	22	31	7	35
25	43	∞	53	57	16
5	50	49	∞	39	9
24	24	33	5	∞	14
34	26	6	3	36	∞

($f_{\min} = 74$)

77.

∞	19	25	11	2	35
37	∞	26	58	21	43
10	50	∞	39	22	3
38	39	24	∞	38	45
27	9	32	9	∞	2
33	48	60	53	1	∞

($f_{\min} = 85$)

3.ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решить следующие задачи, используя метод динамического программирования:

78. $x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 6 \to \max$
$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3$
$x_i \ge 0$, целые ($i = \overline{1,3}$)
($f_{\max} = 15$)

79. $8x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \to \max$
$-x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 \le 3$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целое
($f_{\max} = 15$)

80. $-x_1 + 6x_2 - x_4^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 \to \max$
$4x_1 + 3x_2 \le 12$
$-x_1 + x_2 \le 1$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целое
($f_{\max} = 4$)

81 . $8x_2 - 4x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 \to \max$
$0 \le x_1 \le 12$
$0 \le x_2 \le 3$
x_1, x_2 – целое
($f_{\max} = 14$)

82. Рассматривается промышленное производство некоторой биомассы, начальное количество которой равно S_0. По истечении каждого месяца некоторое количество биомассы x сдается потребителю, принося доход kx, а оставшееся количество z вновь увеличивается до az ($a>1$). Производственные затраты при этом зависят от z и определяются функцией εz^2. Определить объем поставок, обеспечивающий максимальный доход за планируемый период N месяцев. Решить задачу для следующих данных: $k=10$, $\varepsilon=0{,}1$, $a=2$, $S_0=150$, $N=3$.

83. Предприятию нужно распределить имеющийся запас продукции в количестве N ящиков по k магазинам. Если в j-й магазин направить x_j ящиков продукции, то прибыль составит R_j (x_j) руб. Решить задачу оптимального распределения продукции при следующих данных: N=40, k=4, $R_1(x)=x^2$, $R_2(x)=3x+8$, $R_3(x)=3x^2$, $R_4(x)=0{,}2x^2+x$.

84. Самолет может нести груз не более W кг. Этот груз может включать N видов предметов, причем каждый предмет вида j весит v_j кг, а количество предметов j-го вида не превышает n_j. Для каждого предмета j-го вида известно число E_j, определяющее его ценность. Определить количество предметов каждого вида, обеспечивающих наибольшую ценность груза, если W=300, N=3, v_1=20, v_2=30, v_3=40, n_1=10, n_2=8, n_3=7, E_1=5, E_2=9, E_3=7.

Как изменить решение для случая, когда пилот захочет взять самый легкий груз, ценность которого не менее 100?

85. В систему обслуживания, состоящую из n каналов, поступают m заявок. Для обслуживания заявки может быть назначено любое количество k каналов ($0 \le k \le n$). Вероятность обслужива6ния i-й заявки каналов равна p_i, а ценность i-й заявки равна c_i. Определить распределение каналов между заявками, обеспечивающее максимальный средний доход от обслуживания. Решить задачу при следующих данных: n=3, m=4, p_1=0.5, p_2=0.4, p_3=0.6, p_4=0.4, c_1=4, c_2=6, c_3=3, c_4=2.

86. Определить очередность обработки n различных деталей на станке, обеспечивающую минимальный штраф, если время обработки i-й детали равно T_i, по детали i за единицу времени ожидания взимается штраф α_i. Решить задачу при следующих данных: n=5, T_1=1, T_2=2, T_3=1, T_4=3, T_5=3, α_1=3, α_2=5, α_3=4, α_4=3, α_5=4.

87. Сухогруз может взять на борт не более P т груза, общий объем которого не должен превосходить S м^3. На причале имеется груз n наименований. Вес груза j-го наименования равен p_j т, объем s_j м^3, а цена c_j у.е. Решить задачу загрузки судна грузом максимальной стоимости при следующих данных: P=250 т, s=125 м^3, p_1=50, p_2=80, p_3=60, p_4=90, s_1=45, s_2=33, s_3=37, s_4=31, c_1=150, c_2=200, c_3=140, c_4=210.

88. Бригада по ремонту дорог находится в районном центре A. Она получила задание на ремонт дорог в городах данного района A_1, A_2, A_3, A_4. По окончании работ бригада должна вернуться в райцентр. Спланировать оптимальный маршрут бригады, если расстояние между городами заданы следующей таблицей:

$$\text{A} = \begin{array}{c|ccccc|} & A & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A & - & 15 & 18 & 27 & 34 \\ A_1 & 15 & - & 16 & 15 & 22 \\ A_2 & 18 & 16 & - & 10 & 19 \\ A_3 & 27 & 15 & 10 & - & 25 \\ A_4 & 34 & 22 & 19 & 25 & - \end{array}$$

89. Определить маршрут минимальной стоимости из пункта A_1 в пункт A_{10}, если затраты для отдельных участков пути заданы следующей матрицей:

$$A = \begin{array}{c|cccccccccc|} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & A_{10} \\ A_1 & 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ A_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ A_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ A_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ A_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

90. Имеется n снарядов для поражения m целей. Известны вероятности $p_i(k)$ поражения i-й цели k снарядами ($i=\overline{1,m}$; $k=\overline{1,n}$). Требуется так распределить n снарядов по m целям, чтобы вероятность совместного поражения всех целей была максимальна. Решить задачу при следующих данных: n=8; m=3; $p_1(k)$=0,1k; $p_2(k)$=0,1k+0,1; $p_3(k)$=0,15k; $k=\overline{1,8}$.

4. ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решить следующие задачи параметрического программирования:

91. $2x_1 + (3 + \lambda)x_2 \rightarrow \max$
$$\begin{aligned} &3x_1 + 4x_2 \le 10 \\ &x_1 + x_2 \le 5 \\ &2x_1 + x_2 \le 7 \\ &x_i \ge 0 \ (i = 1,2) \end{aligned}$$

92. $(2 + \lambda)x_1 + x_2(3 - \lambda)x_3 + x_4 \rightarrow \max$
$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ &x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ &x_i \ge 0 \ (i = \overline{1,4}) \end{aligned}$$

93. $6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$
$$\begin{aligned} &3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 + \lambda \\ &5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 - \lambda \\ &x_i \ge 0 \ (i = \overline{1,4}) \end{aligned}$$

94. $x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 \rightarrow \max$
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5\lambda \\ &x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3 - \lambda \\ &x_i \ge 0 \ (i = \overline{1,4}) \end{aligned}$$

5. ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решить следующие задачи квадратичного программирования методом Вольфа:

95. $3x_1 - 2x_2 - 0{,}5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \to \max$

$2x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 + 2x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

96. $-4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \to \max$

$x_1 - x_2 \le 1$

$x_1 + x_2 \le 3$

$x_1, x_2 \ge 0$

97. $3(x_1 - 1{,}5)^2 + 6(x_2 - 1{,}5)^2 \to \max$

$0{,}5x_1 + x_2 \le 4$

$3x_1 + x_2 \le 15$

$x_1 + x_2 \ge 1$

$x_1, x_2 \ge 0$

98. $2x_1 + 3x_2 + 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \to \min$

$x_1 - x_2 \ge 0$

$x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 \le 3$

$x_1, x_2 \ge 0$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заславский, Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию/ Ю.Л. Заславский - М.: Наука, 1969.
2. Калихман, И.Л. Сборник задач по математическому программированию/ И.Л. Калихман - М.: Высшая школа, 1975.
3. Капустин, В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования/ В.Ф. Капустин -ЛГУ. Л., 1976.
4. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах/ А.В. Пантелеев. –СПб.:Мир, 2002. -476с.

СОДЕРЖАНИЕ